Asymptotische Analysis

Anwendungen aus der Physik

Michael@Karbach.org

Bergische Universität Wuppertal
Fachgruppe Physik

WS12 – Wuppertal
June 15, 2013

Übersicht

1. Einleitung
   - Literatur
   - Themenübersicht
   - Ordnungsrelationen

Literatur zur Vorlesung Asymptotische Analysis I

- N.I.Achiser:
  Theory of Approximations
- F.S.Acton:
  REAL Computing made REAL
- N.Bleistein and R.Handelsmann:
  Asymptotic Expansions of Integrals
- N.G.De Bruuijn:
  Asymptotic Methods in Analysis
- P.J.Davis:
  Interpolation & Approximation
- A.Erdelyi:
  Asymptotic Expansion
- C.Lanczos:
  Applied Analysis
- T.L.Saaty and J.Bram:
  Nonlinear Mathematics
- J.G.Simmonds:
  A first look at perturbation theory
- E.T. Whittaker and G.N. Watson:
  A Course of Modern Analysis

Übersicht über die Themen I

- **Ordnungsrelationen**
- **Reihen**
  - Asymptotische Reihen, Asymptotische Folgen, Poincare-Reihe
- **Integrale**
  - Partielle Integration
  - Sattelpunktsmethode
- **Transzendente Gleichungen**
  -

Motivation

In dieser Vorlesung betrachten wir zum einen allgemeine Approximationsmethoden, die auf vielfältige Problem in der Physik angewendet werden können. Zum anderen geben wir auch explizite Näherungen für konkrete Ausdrücke und Funktionen an. Die hier dargestellten Verfahren und Methoden stellen eine kleine Auswahl dar.

Typische Fragestellungen

- Wie bekommt man eine *gute* Approximation für die Lösung der Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = \epsilon, \qquad |\epsilon| \ll 1$$

  wenn die Lösung der linken Seite exakt bekannt ist?

- Wie sieht die *asymptotische Lösung* der Gleichung:

$$t = xe^x$$

  für große oder kleine Paramater t aus?

- Wie sieht das *asymptotische Verhalten* der Integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-x}}{1+xt}, \qquad \int_\gamma dz\, g(z) e^{-tf(z)}$$

  als Funktion des Parameters t aus?

- Wie sieht das *asymptotische Verhalten* der Summe:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

  für große N aus?

Ordnungsrelationen I

Um asymptotisches Verhalten von konkreten Ausdrücken qualitativ und quantitativ bewerten zu können brauchen wir eine Ordnungsrelation für das Verhalten der Ausdrücke in einer Umgebung eines vorgegebenen Punktes. Wir definieren zunächst zwei verschiedene Ordnungsbegriffe:

Definition (Ordnungsrelationen)

Es seien Gebiete $\mathbb{G}_0 \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{K}$ gebeben mit Elementen $z \in \mathbb{G}$ und $z_0 \in \mathbb{G}_0$ und zwei stetige Funktionen f und g auf $\mathbb{G}$.

1. Wenn es eine Konstante $(0 <)\gamma < \infty$ gibt, so dass gilt:

$$|f(z)| \leq \gamma |g(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{G}_0, \tag{1}$$

   schreiben wir:

$$f(z) \overset{z \to z_0}{=} \mathcal{O}(g(z)) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) \rightsquigarrow \mathcal{O}(g(z)). \tag{2}$$

2. Wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Umgebung $\mathbb{G}_0$ existiert, so dass gilt:

$$|f(z)| \leq \epsilon |g(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{G}_0, \tag{3}$$

   schreiben wir:

$$f(z) \overset{z \to z_0}{=} o(g(z)). \tag{4}$$

Ordnungsrelationen II

- Der Punkt $z_0 \in \mathbb{G}_0$ wird oft ein konkret ausgewählter Punkt einer zu betrachtenden Funktion sein und $\mathbb{G}_0$ eine kleine Umgebung des Punktes z_0. Für die erste $\mathcal{O}$-Ordnungsrelation bedeutet dies, dass für jede Folge $z_i \in \mathbb{G}_0$, die gegen z_0 geht gilt:

$$\lim_{z_i \to z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq \gamma$$

  Diese Relation benutzen wir um die Eigenschaft zu prüfen.

- Desweiteren folgt aus $f(z) = o(g(z))$ die Ordnungsrelation $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$, nicht aber die Umkehrung. Aus der Eigenschaft 2. folgt, dass es eine Folge $z_i \in \mathbb{G}_0$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\lim_{z_i \to z_0} \frac{f(z_i)}{g(z_i)} = 0. \tag{5}$$

- Die Ordnungsrelation $\mathcal{O}$ nutzt man oft, wenn das Verhalten der Ordnung bekannt ist, wohingegen man die Ordnungsrelation o benutzt, wenn man lediglich weiß, dass die Eigenschaft (5) erfüllt ist. Letztere enthält offenbar weniger Informationen.
- Im Folgenden werden wir immer $z \to z_0$ schreiben und meinen damit beliebige Folgen $z_i \in \mathbb{G}_0$.
- Man beachte die einfachen Beispiele für $x \to 0$:

$$x^2 = \mathcal{O}(x)(= o(x)), \qquad \wedge \qquad \sin x = \mathcal{O}(1), \qquad \wedge \qquad \sin x = \mathcal{O}(x)$$

  In den beiden ersten Fall wäre sogar $\gamma = 0$ möglich. Für die Physik ist es oft besonders wichtig in einem speziellen Punkt z_0, ein Ordnungsverhalten zu finden für das gilt $\lim_{z \to z_0} |f(z)/g(z)| = \gamma > 0$, was wir im Folgenden immer annehmen werden bei der Verwendung von $f(z) \rightsquigarrow \mathcal{O}(g(z))$.

- Man beachte:

$$\mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(x^2) \overset{x \to 0}{=} \mathcal{O}(x) \qquad \wedge \qquad \mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(x^2) \overset{x \to \infty}{=} \mathcal{O}(x^2)$$

Ordnungsrelationen III

Definition (Ordnungsrelationen $x \to \pm\infty$)

Für zwei Funktionen f und g, für die es Konstanten $\gamma < \infty$ und $\Gamma < \infty$ gibt, so dass gilt:

$$|f(x)| \leq \gamma |g(x)|, \quad \Gamma < x < \infty, \tag{6}$$

schreiben wir:

$$f(x) \overset{x \to \infty}{=} \mathcal{O}(g(x)). \tag{7}$$

Analog ist die Definition für $x \to -\infty$.

Behauptung

Es seien Gebiete $\mathbb{G}_0 \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{K}$ gebeben mit Elementen $z \in \mathbb{G}$ und $z_0 \in \mathbb{G}_0$ und zwei stetige Funktionen f und g auf $\mathbb{G}$, dann gelten die Ordnungsrelationen:

$$\mathcal{O}(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(f) \tag{8}$$
$$\mathcal{O}(o(f)) = o(f) \tag{9}$$
$$\mathcal{O}(fg) = \mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g) \tag{10}$$
$$\mathcal{O}(f)o(g) = o(fg) \tag{11}$$
$$\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f) \tag{12}$$
$$o(f) + o(f) = o(f) \tag{13}$$
$$o(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f) \tag{14}$$

<u>Beweis:</u> siehe Übungen!

Beispiele für Ordnungsrelationen I

1. Sei $\mathbb{G} = [-1, +1]$ und $f(x) = x$ sowie $g(x) = \tan x$. Betrachten wir den Punkt $x_0 = 0$ und die dazugehörigen Gebiete $\mathbb{G}_0 = [0, \delta[\subset \mathbb{G}$ mit $0 < \delta < 1$, so folgt mit:

$$g(x) \doteq \tan x = x + \underbrace{\frac{3 \tan \xi}{\cos^2 \xi}}_{\geq 0,\ \exists \xi \in \mathbb{G}_0} \geq x \doteq f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{G}_0$$

   Wählen wir nun $\gamma = 1$, so gilt dann: $f(x) = x = \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(\tan(x))$, $\forall x \in \mathbb{G}_0$.
   Wählen wir andererseits $\gamma = 1/2$, so folgt

$$\gamma g(x) = \frac{1}{2} \tan(x) \leq x = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{G}_0$$

   also auch die Umkehrung $\tan(x) = \mathcal{O}(x)$, $\forall x \in \mathbb{G}_0$.

2. Sei $\mathbb{G} = [0, \infty]$ und $f(x) = \exp(-1/x)$ sowie $g(x) = x^n$, dann folgt für $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = \lim_{y \to \infty} \frac{y^n}{e^y} = 0$$

   Also gilt $\exp(-1/x) = o(x^n), \forall n \in \mathbb{N}$ und $x \to 0$.

Beispiele für Ordnungsrelationen II

3. Sei $f(x) = \log x$ und $g(x) = x^\eta$, dann gilt für das asymptotische Verhalten:
   1. $x \to \infty$:
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\eta} = 0, \qquad \eta > 0, \tag{15}$$
   also ist $\log x = o(x^\eta)$, $\eta > 0$ und damit auch $\log x = \mathcal{O}(x^\eta)$, $\eta > 0$. Darüberhinaus gilt sogar $\log^n x = o(x^\eta)$, $\eta > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Aber es gilt auch:
   $$\lim_{\eta\to 0^+} \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\eta} \neq \lim_{x\to\infty} \lim_{\eta\to 0^+} \frac{\log x}{x^\eta}.$$
   2. $x \to x_0^- > 0$:
   $$\lim_{x\to x_0^-} \frac{\log(x-x_0)}{(x-x_0)^\eta} = \begin{cases} 0 & : \eta < 0 \\ -\infty & : \eta \geq 0 \end{cases} \tag{16}$$
   also ist $\log(x-x_0) = o((x-x_0)^\eta)$, $\forall \eta < 0$, aber wiederum nicht für $\eta = 0$.
4. Es gilt für $x \to \infty$:
$$\begin{aligned}
(\alpha + x + \mathcal{O}(x^{-1}))^x &= \exp(x \ln(x + \alpha + \mathcal{O}(x^{-1}))) \\
&= \exp(x(\ln x + \ln(1 + \alpha/x + \mathcal{O}(x^{-2})))) \\
&= \exp(x(\ln x + \alpha/x + \mathcal{O}(x^{-2}))) \\
&= \exp(\ln x^x + \alpha + \mathcal{O}(x^{-1})) \\
&= e^\alpha x^x + \mathcal{O}(x^{x-1})
\end{aligned}$$

Beispiele für Ordnungsrelationen III

5. Für $x > 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^x dt(1+t^{-1})^t &= \int_1^x dt \exp(t\ln(1+t^{-1})) = \int_1^x dt \exp(1 - 1/2t + 1/3t^2 + \mathcal{O}(t^{-3})))\\ &= e\int_1^x dt \exp(-1/2t + 1/3t^2 + \mathcal{O}(t^{-3}))) = e\int_1^x dt(1 - 1/2t + 11/24t^2 + \mathcal{O}(t^{-3}))\\ &= ex - \frac{e}{2}\ln x + \mathcal{O}(1)\end{aligned}$$

   Achtung, der $\mathcal{O}(1)$ Term verändert sich in jeder Ordnung, die man im Integral mitnehmen würde.

6. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \to 0$ gilt:

$$\int_0^x dt(\ln t)^n = x(\ln x)^n - n\int_0^x dt(\ln t)^{n-1} = x(\ln x)^n + \mathcal{O}(x(\ln x)^{n-1})$$

7. Für festes $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt gleichmäßig:

$$(xe^{2(x-n)})^n = \mathcal{O}(e^{x^2+x})$$

2. Reihen
   - Asymptotische Reihen
   - Asymptotische Funktionenfolge
   - Poincaré Reihe

Asymptotische Reihen I

Definition (Asymptotische Potenzreihe)

Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$, dann nennen wir die **formale** Potenzreihe:

$$S_N^f(z, z_0) \doteq \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f (z - z_0)^n, \tag{17}$$

eine **asymptotische Potenzreihe** von $f(z)$ um $z_0 \in \mathbb{G}$, wenn gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^{-N} \left[f(z) - S_N^f(z, z_0) \right] \right) = 0, \quad \forall z, z_0 \in \mathbb{G}, \quad N \in \mathbb{N} \tag{18}$$

Vergleichen wir das mit den definierten Ordnungsrelationen, so stellen wir fest, dass dann gilt:

$$f(z) \overset{z \to z_0}{=} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f (z - z_0)^n + \mathcal{O}((z - z_0)^{N+1}), \tag{19}$$

denn: $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{-N} \mathcal{O}((z - z_0)^{N+1}) = 0$. Wichtig ist zu bemerken, dass (18) und damit auch (19) nichts über die Konvergenzeigenschaft der asymptotischen Reihe aussagen.
Haben wir beispielsweise $z_0 = 0$ und $\alpha_n^{f_1} = 1/n!$ und $\alpha_n^{f_2} = 1$ so führt dies auf $S_\infty^{f_1}(z, 0) = f_1(z) = \exp(z),\ z \in \mathbb{R}$ und $S_\infty^{f_2}(z, 0) = f_2(z) = 1/(1 - z),\ |z| < 1$ aber die asymptotische Reihe $S_N^{f_2}(z, 0)$ ist für $|z| \geq 1$ nicht konvergent.

Asymptotische Reihen II

So können wir also im Allgemeinen keineswegs die Funktion $f(z)$ gleich der asymptotischen Potenzreihe $S^f_\infty(z, z_0)$ setzen, stattdessen schreiben wir:

$$f(z) \overset{z \to z_0}{\sim} S^f_\infty(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^f_n (z - z_0)^n, \tag{20}$$

oder noch weiter verkürzend $f(z) \sim S^f_\infty(z, z_0)$. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass die Ordnungsrelation nur bis zur einer endlichen Anzahl von Termen in der Potenzreihenentwicklung gilt, deswegen definieren wir:

Definition (Asymptotische Potenzreihe der Ordnung N)

Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$, dann nennen wir $S^f_N(z, z_0)$ eine **asymptotische Potenzreihe der Ordnung** N von $f(z)$ um $z_0 \in \mathbb{G}$, wenn gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(z - z_0)^n} \left[f(z) - S^f_N(z, z_0) \right] \right) = 0, \quad \forall z, z_0 \in \mathbb{G}_0, \quad 0 \leq n \leq N \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Für eine asymptotische Potenzreihe der Ordnung N gilt also:

$$f(z) \overset{z \to z_0}{\sim} S^f_N(z, z_0).$$

Asymptotische Reihen III

Für die Ordnungsrelation erhalten wir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f (z - z_0)^n + \mathcal{O}((z - z_0)^N),$$

denn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{(z - z_0)^m} \left[f(z) - S_N^f(z, z_0) \right] = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathcal{O}((z - z_0)^N)}{(z - z_0)^m} = 0, \quad \forall m \leq N.$$

Aus der Analysis ist uns der Begriff der Taylorentwicklung vertraut. Ohne auf die Konvergenzeigenschaften einer Taylorentwicklung einzugehen, hat man deswegen für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty$ zunächst die asymptotische Potenzreihenentwicklung:

$$f(z) \overset{z \to z_0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dz^n} f(z) \bigg|_{z=z_0} \frac{(z - z_0)^n}{n!} \tag{22}$$

Ist diese Summe konvergent, so wissen wir aus der Funktionentheorie, dass $f(z)$ holomorph ist. Umgekehrt gilt, dass wenn die Reihe (22) nicht konvergiert, $f(z)$ in z_0 nicht holomorph ist. Betrachten wir als Beispiel die Funktion:

$$f(x) \doteq \begin{cases} \exp(-1/x) & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^n}{dz^n} f(z) \bigg|_{z=0} = 0 \tag{23}$$

und somit lautet die asymptotische Reihenentwicklung: $f(x) \overset{x \to 0}{\sim} 0$.

Beispiele asymptotischer Reihen I

Beispiel

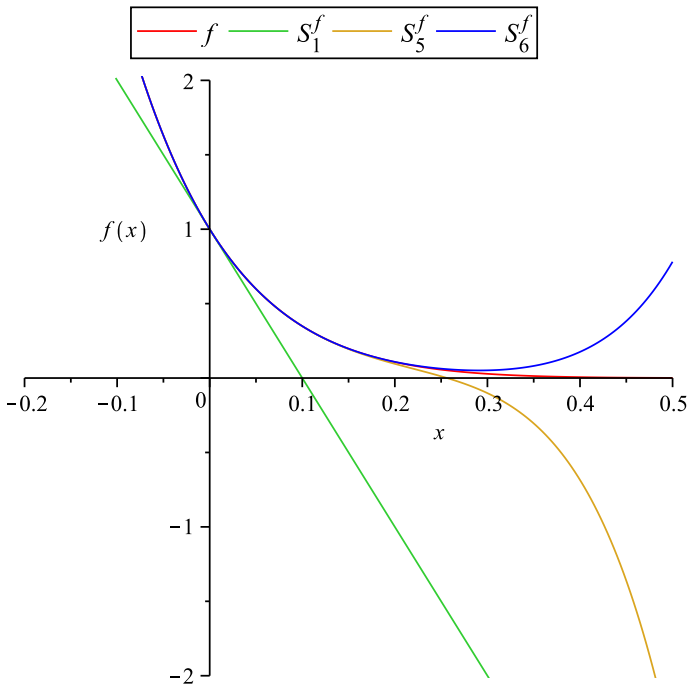
$$f_M(x) = (1-x)^M, \qquad M \in \mathbb{N} \tag{24}$$

Zunächst gilt exakt:

$$S_N^{f_M}(x,0) \doteq \sum_{n=0}^{N} \binom{M}{n} (-x)^n, \quad N \leq M \qquad \Longrightarrow \qquad f_M(x) = \sum_{n=0}^{M} \binom{M}{n} (-x)^n = S_M^{f_M}(x,0) \tag{25}$$

Im Plot ist die Funktion $f_{10}(x)$ (24) dargestellt, sowie die Funktionen $S_1^{f_{10}}$, $S_5^{f_{10}}$ und $S_6^{f_{10}}$ aus (25). Diese Funktionen sind asymptotische Reihen der Ordnung $N = 1, 5, 6$ um $x_0 = 0$, denn es gilt für $N < M$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^N}\left(f_M(x) - S_N^{f_M}(x,0)\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^N}\left(S_M^{f_M}(x,0) - S_N^{f_M}(x,0)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \sum_{n=N+1}^{M} \binom{M}{n} (-x)^{n-N} \\
&= 0 \qquad (N < M)
\end{aligned}$$



Ein Problem in asymptotischen Entwicklungen ist an diesem Beispiel zu erkennen, wenn man die vollständige Entwicklung $S_N^{f_m}$ betrachtet:

$$S_6^{f_{10}}(x,0) = 1 - 10x + 45x^2 - 120x^3 + 210x^4 - 252x^5 + 210x^6$$

Für $x = 1/2$ tragen die ersten beiden Terme mit 1 und -5 und die beiden letzten Terme mit -7.875 bzw. 3.28125 zur Summe bei. Alle Terme sind von gleicher Größenordnung!

Beispiele asymptotischer Reihen II

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \tag{26}$$

Zunächst gilt exakt:

$$S_N^f(x) \doteq \sum_{n=0}^{N} x^n \equiv \frac{1-x^{N+1}}{1-x}, \quad N \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \overset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = S_\infty^f(x) \tag{27}$$

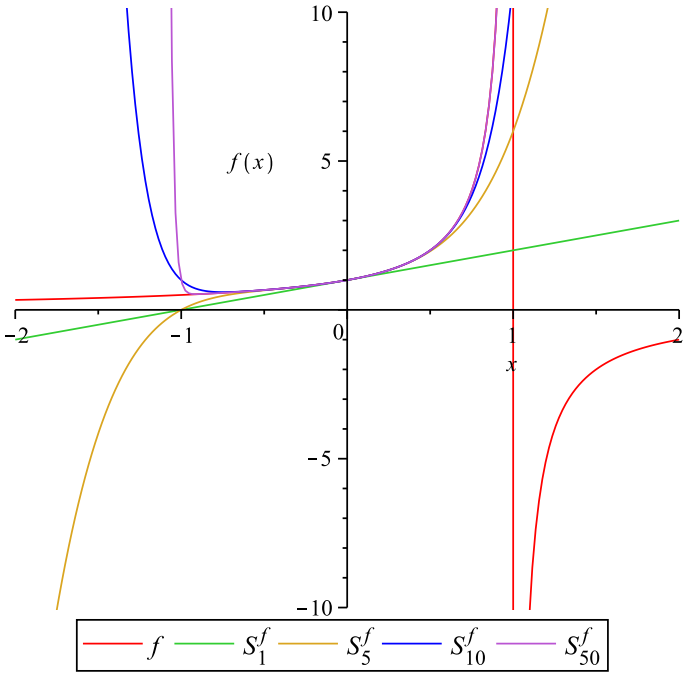
Im Plot ist die Funktion $f(x)$ (26) dargestellt, sowie die Funktionen S_N^f, $N = 1, 5, 10, 50$ aus (27). Betrachten wir

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - S_N^f(x)}{x^N} = \lim_{x\to x_0} \frac{x}{1-x} = \frac{x_0}{1-x_0} \overset{x_0=0}{=} 0$$

Damit ist $S_N^f(x)$ eine asymptotische Reihe der Ordnung $N \in \mathbb{N}$ nur um den Punkt $x_0 = 0$. Der Limes $N \to \infty$ der Funktion $S_N^f(x)$ existiert nur für $|x| < 1$ und es gilt: $S_\infty^f(x) = f(x)$. Dies ist deutlich im Plot zu erkennen. Betrachtet man die Umgebung um $x = 1$ und setzt: $x = 1 - \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$, so gilt:

$$f(1-\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \quad \wedge \quad S_N^f(1-\epsilon) = \frac{1-(1-\epsilon)^{N+1}}{\epsilon} \overset{(25)}{=} N+1+\mathcal{O}(\epsilon)$$

Für gute Näherungen in der Nähe von $x = 1$ braucht man $N = \mathcal{O}(1/\epsilon)$ viele Terme!



Beispiele asymptotischer Reihen III

Beispiel

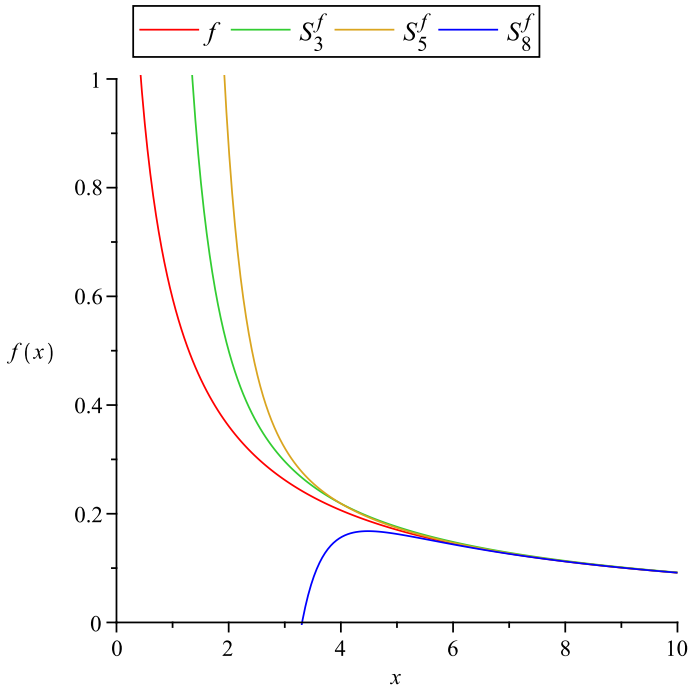
$$f(x) \doteq e^x \int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t} = e^x \mathrm{E}_1(\mathrm{x}), \qquad x > 0. \tag{28}$$

Eine mehrfache partielle Integration ergibt:

$$f(x) = e^x \int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t} = \frac{1}{x} - e^x \int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^2} \overset{p.I.}{=} \dots$$

$$\overset{x\geq 1}{=} \underbrace{-\sum_{n=1}^{N} \frac{(n-1)!}{(-x)^n}}_{\doteq S_N^f(x)} + (-)^N N!\, \underbrace{e^x \int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t^{N+1}}}_{=\mathcal{O}(x^{-N-1})}$$

$$= S_N^f(x) + \mathcal{O}(x^{-N-1}) \tag{29}$$



Die Funktion $f(x)$ wird für große x von der asymptotischen Potenzreihe $S_N^f(x)$ der Ordnung $\mathcal{O}(x^{-N-1})$ dargestellt. Die Güte der Approximation ist aus der Abbildung qualitativ zu erkennen.

Der Frage bei welchem N und vorgegebenem x die Reihe $S_N^f(x)$ die Funktion $f(x)$ am besten darstellt wollen wir an dieser Stelle nicht nachgehen. Es ist aber schon aus diesem Beispiel ersichtlich, dass nicht notwendig eine größere Ordnung auch eine größere Genauigkeit erzielt. Desweiteren gilt:

$$x^N |f(x) - S_N^f(x)| = \frac{N!}{x} \int_x^\infty \frac{dx\; e^{-t+x} x^{N+1}}{t^{N+1}} = \frac{N!}{x} \int_0^\infty \frac{dy\; e^{-y} x^{N+1}}{(y+x)^{N+1}} \leq \frac{N!}{x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Asymptotische Potenzreihe um $z = \infty$

Aus dem letzten Beispiel ist aber auch sofort klar, dass die Reihe $S_N^f(x)$ im allgemeinen keine konvergente Reihe darstellen muss. Motiviert durch dieses Beispiel, definieren wir im nächsten Schritte den Begriff der asymptotische Potenzreihe um $z_0 = \infty$.

Definition (Asymptotische Potenzreihe)

Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$, dann nennen wir die **formale** Potenzreihe:

$$S_N^f(z) \doteq \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n^f}{z^n}, \tag{30}$$

eine **asymptotische Potenzreihe** von $f(z)$ für $z \to \infty$, wenn gilt:

$$\lim_{z\to\infty} \left(z^N \left[f(z) - S_N^f(z) \right] \right) = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Ebenso äquivalent schreiben wir dann auch:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n^f}{z^n} + \mathcal{O}(z^{-N-1}), \quad N \in \mathbb{N}, \tag{32}$$

oder

$$f(z) \overset{z\to\infty}{\sim} S_\infty^f(z). \tag{33}$$

Asymptotische Funktionenfolge

Definition (Asymptotische Funktionenfolge)

Eine Funktionenfolge $\{\phi_n \in \mathcal{C}(\mathbb{G}),\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ nennen wir eine **asymptotische Funktionenfolge** in $z_0 \in \mathbb{G}_0$, wenn gilt:

$$\phi_{n+1}(z) = \mathcal{O}(\phi_n(z)), \quad \forall z \to z_0. \tag{34}$$

Aus der Eigenschaft (34) folgt für asymptotische Funktionenfolgen die Verallgemeinerung:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\phi_{n+1}(z)}{\phi_n(z)} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

Beispiel:

1. $x_0 < \infty$:
$$\phi_n(x) = (x - x_0)^{n\eta}, \quad \eta > 0 \tag{36}$$
2. $x_0 = \infty$:
$$\phi_n(x) = \frac{1}{x^{n\eta}}, \quad \eta > 0 \tag{37}$$
3. $x_0 = 0$:
$$\phi_n(x) = \sin^n(x) \tag{38}$$
4. $f(x_0) = 0$:
$$\phi_n(x) = f(x)^n \tag{39}$$

Poincaré Reihe I

Definition (Poincaré Reihe)

Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$ und eine asymptotische Funktionenfolge $\phi_n \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$ in $z_0 \in \mathbb{G}_0$ gegeben, dann nennen wir die **formale** Reihe:

$$S_N^f(z, z_0) \doteq \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f \phi_n(z), \tag{40}$$

eine **asymptotische oder Poincaré Reihe** von $f(z)$ um $z_0 \in \mathbb{G}_0$, wenn gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - S_N^f(z, z_0)}{\phi_N(z)} \right) = 0, \quad \forall z \to z_0, \quad N \in \mathbb{N} \tag{41}$$

An dieser Stelle bemerken wir wie zuvor, dass wir hierfür auch schreiben:

$$f(z) \overset{z \to z_0}{=} S_N^f(z, z_0) + \mathcal{O}(\phi_{N+1}), \tag{42}$$

oder symbolisch und ohne auf Konvergenzeigenschaften einzugehen schreiben wir dann:

$$f(z) \overset{z \to z_0}{\sim} S_\infty^f(z, z_0) \tag{43}$$

Als nächstes gehen wir der Frage der Eindeutigkeit einer asymptotischen Reihe nach.

Poincaré Reihe II

Theorem (Eindeutigkeit der Poincaré Reihen)

Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$ und eine asymptotische Reihe der asymptotischen Funktionenfolge ϕ_n gegeben:

$$S_N^f(z, z_0) \overset{z \to z_0}{=} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f \phi_n(z) \qquad \wedge \qquad f(z) \overset{z \to z_0}{=} S_N^f(z, z_0) + \mathcal{O}(\phi_{N+1}), \tag{44}$$

dann sind die Koeffizienten α_n^f eindeutig bestimmt:

$$\alpha_0^f = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{\phi_0(z)} \qquad \wedge \qquad \alpha_n^f = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - S_{n-1}^f(z, z_0)}{\phi_n(z)}, \quad n = 1, \ldots N. \tag{45}$$

<u>Beweis:</u> Zunächst definieren wir den sogenannten Fehler- bzw. Restterm:

$$\mathcal{E}_N(z, z_0) \doteq f(z) - S_N^f(z, z_0). \tag{46}$$

Für diesen Term gilt nach Definition: $\lim_{z \to z_0} \mathcal{E}_N(z, z_0)/\phi_n(z) = 0,\ n = 0, 1, \ldots, N$, damit folgt:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - S_{n-1}^f(z, z_0)}{\phi_n(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathcal{E}_N(z, z_0) + S_N^f(z, z_0) - S_{n-1}^f(z, z_0)}{\phi_n(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\sum_{m=n}^{N} \alpha_m^f \phi_m(z)}{\phi_n(z)} = \alpha_n^f.$$

Poincaré Reihe III

Aus dieser Gleichung folgen die Koeffizienten $\alpha_n^f, n = 0, 1, \ldots, N$ rekursiv. Nehmen wir nun an es gäbe eine zweite asymptotische Reihe:

$$S_N^f(z, z_0) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n^f \phi_n(z),$$

so gilt auch auch für diese Reihe:

$$\beta_n^f = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - S_{n-1}^f(z, z_0)}{\phi_n(z)}, \quad \forall n = 1, \ldots, N.$$

Mit Hilfe der Induktion folgt nun:

$$\alpha_0^f = \beta_0^f = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{\phi_0(z)}.$$

Es gelte nun $\alpha_i^f = \beta_i^f$ für $i = 1, 2, \ldots, n < N$, dann folgt:

$$\alpha_{n+1}^f - \beta_{n+1}^f = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^f \phi_i(z) - f(z) + \sum_{i=0}^{n} \beta_i^f \phi_i(z)}{\phi_{n+1}(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\sum_{i=0}^{n} \overbrace{(\beta_i^f - \alpha_i^f)}^{=0} \phi_i(z)}{\phi_{n+1}(z)} = 0.$$

Damit folgt insgesamt $\alpha_n^f = \beta_n^f$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. □

Beispiel zu Poincaré Reihen I

Das Poincaré-Theorem ist jedoch in der Praxis in der Regel nicht von großem Nutzen, wenn man nicht schon einiges über die gesuchte asymptotische Reihe *a priori* weiß, wie das folgende Beispiel verdeutlicht.

Beispiel

$$f(x) = e^x \mathrm{E}_1(x) = e^x \int_x^\infty dt\, \frac{e^{-t}}{t} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{(n-1)!}{(-x)^n} + \mathcal{O}(x^{-N-1}) \tag{47}$$

Dies ist nochmals die Funktion (29) und wenden das Konstruktionsverfahren des Eindeutigkeits-Theorems auf verschiedene asymptotische Funktionenfolgen an. Starten wir zunächst mit $\phi_n = x^{-n}$ für $x \to \infty$, so erhalten wir mittels (45):

$$\alpha_n^f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - S_{n-1}^f(x, x_0)}{\phi_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{i=n}^{N} \phi_i(x)(-)^{i-1}(i-1)!}{\phi_n(x)} = (-)^{n-1}(n-1)!, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Nehmen wir als Beispiel an, dass wir diese asymptotische Potenzreihe **nicht kennen** würden und wenden das Konstruktionsverfahren der asymptotischen Potenzreihenentwicklung auf die beiden asymptotischen Funktionenfolgen an:

$$\phi_n(x) = x^{-n} \qquad \wedge \qquad \hat{\phi}_n(x) = x^{-2n+1}$$

Beispiel zu Poincaré Reihen II

Mit Hilfe der L'Hospital-Regel folgt für die ersten Koeffizienten:

$$\alpha_1^f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - S_0^f(x)}{\phi_1(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\mathrm{E}_1(x)}{e^{-x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{E}_1(x) - xe^{-x}/x}{-e^{-x}} = 1$$

$$\alpha_2^f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - S_1^f(x)}{\phi_2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\mathrm{E}_1(x) - e^{-x}/x)}{e^{-x}} \overset{L'H}{=} 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{2x\mathrm{E}_1(x)}{e^{-x}} = -1$$

Dies ist in Übereinstimmung mit den bekannten Ergebnissen durch die partielle Integration. Die Berechnung der weiteren Koeffizienten wird immer aufwendiger. Betrachten wir den zweiten Fall:

$$\hat{\alpha}_1^f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - S_0^f(x)}{\hat{\phi}_1(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\mathrm{E}_1(x)}{e^{-x}} \overset{L'H}{=} 1$$

$$\hat{\alpha}_2^f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - S_1^f(x)}{\hat{\phi}_2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(\mathrm{E}_1(x) - x^{-1}e^{-x})}{e^{-x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2\mathrm{E}_1(x) - 2xe^{-x}}{e^{-x}} = \infty$$

Dies ist also eine Potenzreihenentwicklung erster Ordnung und nicht mehr. Das Beispiel soll nur aufzeigen, dass im Algemeinen etwas über die Natur der asymptotischen Reihe bekannt sein muss um verwendbare Ergebnisse zu erhalten. Es sei nochmals ausdrücklich bemerkt, dass dieses Beispiel nur den Sachverhalt verdeutlichen soll, denn tatsächlich ist eine asymptotischen Potenzreihenentwicklung durch partielle Integration schon bekannt.

Beispiel zu Poincaré Reihen III

Um die Unterschiede zu konvergenten Taylor- oder Laurentreihen zu verdeutlichen seinen nun einige Bemerkungen und Beispiele aufgeführt. Eine Funktion $f(x)$ kann verschiedene asymptotische Entwicklungen besitzen, desweiteren kann ein und die selbe asymptotische Entwicklung zu verschiedenen Funktionen gehören. Betrachten wir hierzu Beispiele.

Beispiel

$$f(x) \doteq \sqrt{1-\sin x} \qquad \wedge \qquad \phi_n^1(x) \doteq \sin^n x \qquad \wedge \qquad \phi_n^2(x) \doteq x^{2n}/\sqrt{1+\sin x}$$

für $x \to 0$.

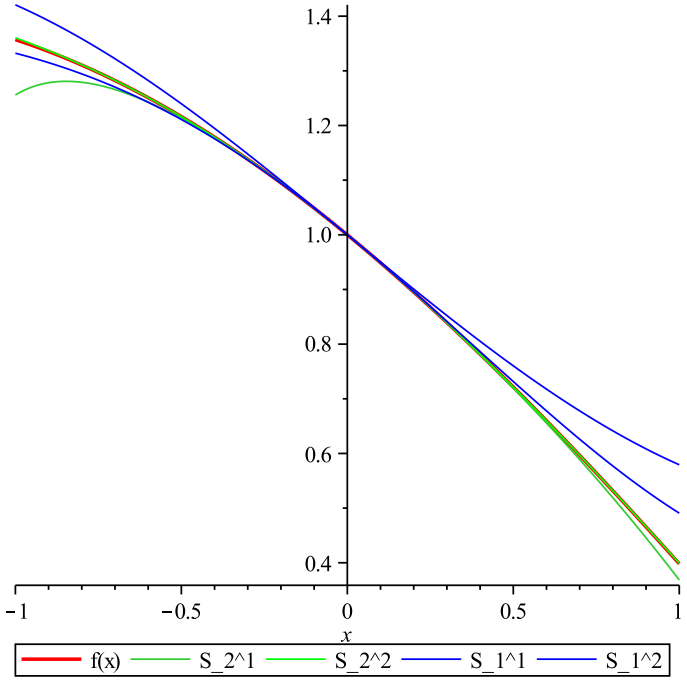
Es gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \binom{1/2}{n} \phi_n^1(x) \doteq S_\infty^1(x)$$

oder

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} \phi_n^2(x) \doteq S_\infty^2(x)$$

Es handelt sich bei ϕ_n^i, $i = 1, 2$ offenbar um zwei asymptotische Funktionenfolgen der selben Funktion $f(x)$ für $x \to 0$. Im Plot ist zu erkennen, wie jeweils die nächst höhere Ordnung eine Verbesserung des Ergebnis leifert und das die zweite Reihe insgesamt ein besseres Ergebnis liefert.



Beispiel zu Poincaré Reihen IV

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \wedge \qquad \phi_n^1(x) = x^n \qquad \wedge \qquad \phi_n^2(x) = (1-x)x^{2n}$$

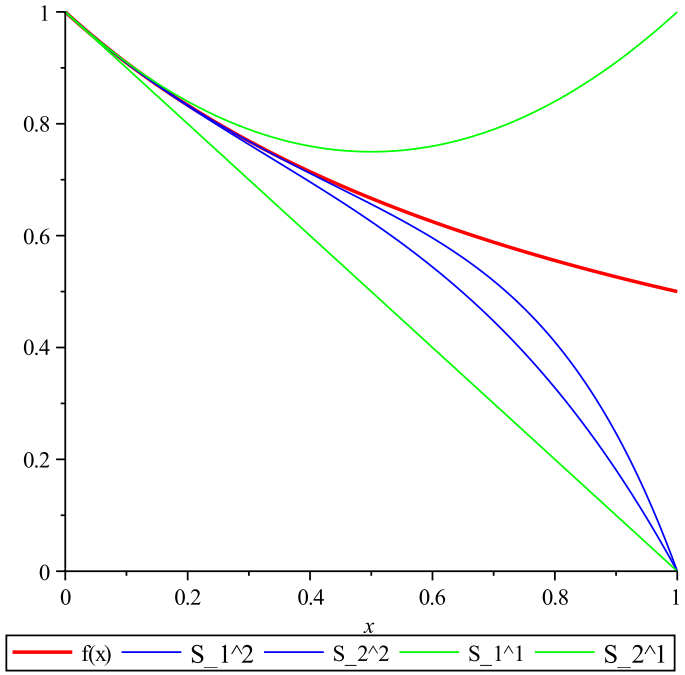
für $x \to 0$.

Es gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n x^n =: S_\infty^1(x)$$

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^{2n} =: S_\infty^2(x)$$

Die Abbildung zeigt, dass je nach gewählter Form der asymptotischen Funktionenfolge eine unterschiedliche Annäherung an das asymptotische Verhalten erzielt werden kann. Dies wird hier dadurch erreicht, dass im ersten Fall eine alternierende Reihe und im zweiten Fall eine monotone Reihe verwendet wird.



Beispiel zu Poincaré Reihen V

Beispiel

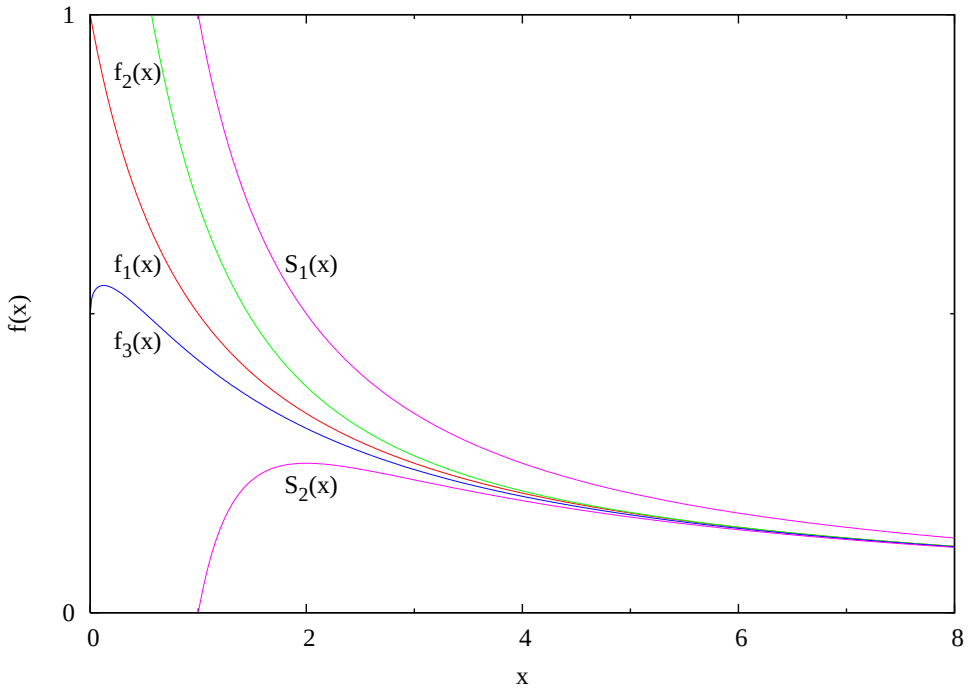
$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \wedge \qquad f_2(x) = \frac{1+e^{-x}}{1+x} \qquad \wedge \qquad f_3(x) = \frac{1}{1+x+e^{-\sqrt{x}}}$$

mit $\phi_n(x) = x^{-n}$ für $x \to \infty$.

Bezüglich der asymptotischen Funktionenfolge $\phi_n(x)$ für $x \to \infty$ besitzen alle drei Funktionen die asymptotische Entwicklung:

$$f_i(x) \overset{x\to\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \phi_n(x),$$

da die verändernden Terme in $f_2(x)$ und $f_3(x)$ von Ordnung $\mathcal{O}(\exp(-x))$ bzw. $\mathcal{O}(\exp(-\sqrt{x}))$ sind und in beiden Fälle gilt: $\exp(-x^\eta) = o(x^{-n})$, $\forall n \in \mathbb{N}, \eta > 0$ für $x \to \infty$.



Beispiel zu Poincaré Reihen VI

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2e^x} \qquad \wedge \qquad \phi_n^m(x) = \left(\frac{e^{-x^{m/2}}}{x}\right)^n \qquad m = 0,1,2, \qquad x \to \infty$$

Betrachten wir die Fälle $m = 0, 1, 2$ und verwenden das Poincaré-Theorem und (45) zur Bestimmung der α_n^f:

- $m = 0$

$$\alpha_0^f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1^f = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2e^x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_n^f = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{1+x^2e^x} = 0$$

  Damit folgt $\alpha_n^f = 0, \ \forall n$

- $m = 1$

$$\alpha_0^f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1^f = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\sqrt{x}}}{1+x^2e^x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_2^f = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2e^{2\sqrt{x}}}{1+x^2e^x} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha_n^f = \lim_{x\to\infty} \frac{x^ne^{n\sqrt{x}}}{1+x^2e^x} = 0$$

  Damit folgt $\alpha_n^f = 0, \ \forall n$

Beispiel zu Poincaré Reihen VII

- $m = 2$

$$\alpha_0^f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1^f = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x}{1+x^2e^x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_2^f = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2e^{2x}}{1+x^2e^x} = \infty$$

Damit folgt $\alpha_0^f = \alpha_1^f = 0, \alpha_2^f = \infty$

- Aus den drei Beispielen ist jedoch ersichtlich, wie die richtige asymptotische Funktionenfolge aussieht:

$$\phi_n(x) = \frac{e^{-nx}}{x^{2n}}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0^f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1} = 0 \qquad &\Longrightarrow \qquad \alpha_1^f = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2e^x}{1+x^2e^x} = 1 \\
&\Longrightarrow \qquad \alpha_2^f = \lim_{x\to\infty} x^4e^{2x}\left(\frac{1}{1+x^2e^x} - \frac{1}{x^2e^x}\right) = -1 \\
&\Longrightarrow \qquad \alpha_3^f = \lim_{x\to\infty} x^6e^{3x}\left(\frac{1}{1+x^2e^x} - \frac{1}{x^2e^x} + \frac{1}{x^4e^{2x}}\right) = 1
\end{aligned}$$

Dies führt unmittelbar auf $\alpha_n^f = (-)^{n+1}$. Das Ergebnis kann verifiziert werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x^2e^x)^n} \overset{q=x^{-2}e^{-x}}{=} -\sum_{n=1}^{\infty}(-q)^n = 1 - \frac{1}{1+q} = \frac{1}{1+q^{-1}} = \frac{1}{1+x^2e^x} = f(x)$$

Verallgemeinerte Poincare-Reihen I

Als letzte Verallgemeinerung der asymptotischen Reihen betrachten wir:

Definition (Allgemeine asymptotische Reihe)

Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$ und eine asymptotische Funktionenfolge $\phi_n \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$ in $z_0 \in \mathbb{G}_0$ gegeben, dann nennen wir die **formale** Reihe:

$$S_N^f(z, z_0) \doteq \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f(z)\phi_n(z), \tag{48}$$

eine **allgemeine asymptotische Reihe** von $f(z)$ um $z_0 \in \mathbb{G}_0$, wenn gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - S_N^f(z, z_0)}{\phi_N(z)} \right) = 0, \quad \forall z \to z_0, \quad N \in \mathbb{N} \tag{49}$$

Im Unterschied zu den bisherigen asymptotischen Reihen ist nun der Koeffizient $\alpha_n^f(z)$ ebenfalls vom Argument z abhängig! Deswegen ist sofort ersichtlich, dass eine solche Definition keinerlei Eindeutigkeit, wie etwa im Fall der Poincaré-Reihe, mehr zulässt. Wir gewinnen jedoch bestimmte Klassen von asymptotischen Reihen hinzu, wie das folgende Beispiel verdeutlicht.

Verallgemeinerte Poincare-Reihen II

Beispiel

$$f(x) \overset{x\to\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{N} \cos(nx)\phi_n(x) + \mathcal{O}(\phi_{N+1}(x)), \quad \phi_n(x) = x^{-n\eta}, \quad \eta > 0 \tag{50}$$

Betrachten wir das Ordungsverhalten:

$$\cos(nx)\phi_n(x) = \mathcal{O}(x^{-n\eta}) = \mathcal{O}(\phi_n(x))$$

dann sehen wir, dass im Sinne der bisherigen Definitionen, die Reihendarstellung (48) eine sinnvolle Erweiterung des Konzeptes darstellt. Jedoch ist die Funktionenfolge $\cos(nx)\phi_n(x)$ selbst keine asymptotischen Funktionenfolge, denn:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos((n+1)x)\phi_{n+1}(x)}{\cos(nx)\phi_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos((n+1)x)}{\cos(nx)x^{\eta}} \neq 0.$$

Asymptotische Reihen sind in der Regel nicht eindeutig, tatsächlich kann man leicht zeigen, dass für eine gegebene asymptotische Funktionenfolge $\{\phi_n\}$ eine *Äquivalenzrelation* definiert werden kann. Dann sind zwei asymptotische Reihen $S_N^{f_1}$ und $S_N^{f_2}$ äquivalent, wenn $S_N^{f_1} - S_N^{f_2} = \mathcal{O}(\phi_N)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.

Verallgemeinerte Poincare-Reihen III

Lemma

Es sei eine asymptotische Funktionenfolge $\{\phi_n(x)\}, n = 0, 1, \ldots$ *für* $x_0 \to x$*, die auf dem Intervall* $[x_0, x]$ *integrierbar ist, gegeben. Dann ist die Folge:*

$$\Phi_n(x) \doteq \int_{x_0}^{x} dt\ \phi_n(t), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{51}$$

eine asymptotische Funktionenfolge für $x \to x_0$*.*

Beweis: Dazu zeigen wir:

$$\Phi_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} dt\ \phi_{n+1}(t) = (x - x_0)\mathcal{O}(\Phi_n(x)) = \mathcal{o}\left(\int_{x}^{x_0} dt\ |\phi_n(t)|\right) = \mathcal{o}(\Phi_n(x)). \tag{52}$$

Dieses Ergebnis verwenden wir nun um es auf asymptotische Reihen anzuwenden.

Verallgemeinerte Poincare-Reihen IV

Lemma

Es sei eine asymptotische auf dem Intervall $[x_0, x]$ integrierbare Funktionenfolge $\{\phi_n(x)\}, n = 0, 1, \ldots$ für $x \to x_0$ gegeben, sowie eine asymptotische Reihe für die gelte:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f \phi_n(x) + \mathcal{O}(\phi_{N+1}(x)). \tag{53}$$

Wenn die Stammfunktion:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} dx' \; f(x') \tag{54}$$

existiert, dann ist eine asymptotische Entwicklung von $F(x)$ für $x \to x_0$ gegeben durch:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f \Phi_n(x) + \mathcal{O}(\Phi_N(x)) \tag{55}$$

Beweis: Zum Beweis setzen wir (53) in (54) ein und integrieren:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} dt \; \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f \phi_n(t) + \mathcal{O}(\phi_{N+1}(t)) \right) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f \int_{x_0}^{x} dt \; \phi_n(t) + \int_{x_0}^{x} dt \; \mathcal{O}(\phi_{N+1}(t))$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^f \Phi_n(x) + \mathcal{O}(\Phi_N(x))$$

Verallgemeinerte Poincare-Reihen V

Die Differentiation ist jedoch nicht verträglich mit asymptotischen Reihen, wie das folgende Beispiel verdeutlicht:

Beispiel

$$\phi_n(x) = x^n(\cos(x^{1-n}) + \alpha), \quad \alpha > 1 \tag{56}$$

für $x \to 0$.

Dies ist eine asymptotischen Funktionenfolge ist, denn:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\phi_{n+1}(x)}{\phi_n(x)} = \lim_{x\to 0} x \frac{\cos(x^{-n}) + \alpha}{\cos(x^{1-n}) + \alpha} = 0, \qquad \forall n$$

Aber die Folge:

$$\phi_n'(x) \equiv \partial\phi_n(x) = nx^{n-1}(\cos(x^{1-n}) + \alpha) + (n-1)\sin(x^{1-n}),$$

ist keine asymptotische Funktionenfolgefolge, denn der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \phi_{n+1}'(x)/\phi_n'(x) \neq 0$, da der Nenner Nullstellen hat, die nicht identisch sind mit denen des Zählers und diese sich bei $x = 0$ häufen. Es können Voraussetzungen formuliert werden unter denen eine Differentiation der asymptotischen Reihe möglich ist. Dies wollen wir an dieser Stelle nicht weiter ausführen.

3. Asymptotische Entwicklung von Integralen
   - Partielle Integration
   - Sattelpunktsmethode

Asymptotische Entwicklung von Integralen

Aufgabenstellung

Im Folgenden untersuchen wir Techniken zur Entwicklung asymptotischer Reihen für verschiedene Klassen von Integralen, die von einem Parameter, in der Folge λ genannt, abhängen. Die allgemeinste Form eines solchen Integrals welches wir hier betrachten lautet:

$$I(\lambda) = \int_\gamma z\, h_\lambda(z) f(z) \tag{57}$$

Dabei ist γ ein Integrationsweg in der im allgemeinen komplexen Ebene.

Die Voraussetzungen an die Funktionen $h_\lambda(t)$ und $f(t)$, sowie den Integrationsgrenzen sind vielfältig. Zwei wichtige Techniken zur Bestimmung von asymptotischen Verhalten von Integralen ist die *partielle Integration* sowie die *Sattelpunktsmethode*. Wir verwenden die folgende Notation:

Definition

$$f^{(n)}(z) \doteq \frac{d^n f(z)}{dz^n}, \quad n \geq 0, \tag{58}$$

$$f^{(-n+1)}(z) \doteq \frac{df^{(-n)}}{dz}, \quad n > 0. \tag{59}$$

Über diese Definition ist die Funktion $f^{(-n)}(z)$ nur bis auf eine Konstante definiert. Die Wahl der Integrationskonstante muss dann im konkreten Fall geeignet gewählt werden.

Partielle Integration - $h_\lambda(t)$ I

Reihendarstellung mittels partieller Integration

Formal ergibt sich die Reihendarstellung des Integrals (57) ($a < b$):

$$I(\lambda) = \int_a^b dt\ h_\lambda(t) f(t) = S_N^I(\lambda) + \mathcal{E}_N^I(\lambda) \tag{60}$$

$$S_N^I(\lambda) \doteq \sum_{n=0}^{N} (-)^n \left(h_\lambda^{(-n-1)}(b) f^{(n)}(b) - h_\lambda^{(-n-1)}(a) f^{(n)}(a) \right) \tag{61}$$

$$\mathcal{E}_N^I(\lambda) \doteq (-)^{N+1} \int_a^b dt\ h_\lambda^{(-N-1)}(t) f^{(N+1)}(t) \tag{62}$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= \int_a^b dt\ h_\lambda(t) f(t) \\
&= h_\lambda^{(-1)}(t) f(t) \Big|_a^b - \int_a^b dt\ h_\lambda^{(-1)}(t) f^{(1)}(t) \\
&= \left(h_\lambda^{(-1)}(t) f^{(0)}(t) - h_\lambda^{(-2)}(t) f^{(1)}(t) \right) \Big|_a^b + \int_a^b dt\ h_\lambda^{(-2)}(t) f^{(2)}(t) \\
&= \sum_{n=0}^{N} (-)^n h_\lambda^{(-n-1)}(t) f^{(n)}(t) \Big|_a^b + (-)^{N+1} \int_a^b dt\ h_\lambda^{(-N-1)}(t) f^{(N+1)}(t)
\end{aligned}$$

Partielle Integration - $h_\lambda(t)$ II

Im Sinne der bisherigen Ausführungen wird dies eine asymptotische Entwicklung darstellen, wenn die Ordnungsrelation $S_N^I(\lambda) = \mathcal{O}(\mathcal{E}_N^I(\lambda))$ für einen Punkt $\lambda = \lambda_0$ gilt.
Damit die so abgeleitete asymptotische Reihe eine gute Approximation der Ausgangsfunktion $I(\lambda)$ in $\lambda = \lambda_0$ darstellt, muss offenbar gelten: $|\mathcal{E}_N^I(\lambda)| \ll |S_N^I(\lambda)|$ wenigstens für alle t in einer bestimmten Umgebung des betrachteten Definitionsbereiches. Um konkrete Ergebnisse zu erzielen betrachten wir Spezialfälle des allgemeinen Integrals (58) und beginnen mit einem Theorem.

Theorem

Es sei $f^{(n)} \in \mathcal{C}([a,b])$ für $n = 0, 1, \ldots, N+2$, desweiteren sei eine Funktion $h_\lambda(t)$, sowie eine asymptotische Funktionenfolge $\{\phi_k(\lambda)\} \in \mathcal{C}([a,b])$ für $\lambda \to \lambda_0$ gegeben, so dass gilt:

$$|h_\lambda^{(-n-1)}(t)| \leq \alpha_n(t)\phi_n(\lambda), \quad \forall t \in [a,b], \quad n = 0, 1, \ldots, N+1, \tag{63}$$

wobei $\alpha_n \in \mathcal{C}([a,b])$, dann gilt:

$$I(\lambda) \equiv \int_a^b dt\; h_\lambda(t) f(t) \overset{\lambda \to \lambda_0}{=} S_N^I(\lambda) + \mathcal{E}_N^I(\lambda), \tag{64}$$

mit $S_N^I(\lambda)$ aus Gleichung (61) und $\mathcal{E}_N^I(\lambda) = \mathcal{O}(\phi_N(\lambda))$ aus Gleichung (62).

Partielle Integration - $h_\lambda(t)$ III

Beweis: Zum Beweis des Theorems schätzen wir den Restterm $\mathcal{E}_n^I(\lambda)$ für $n = 0, 1, \ldots, N$ und $\lambda \to \lambda_0$ ab:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n^I(\lambda) &= (-)^{n+1} \int_a^b dt\ h_\lambda^{(-n-1)}(t) f^{(n+1)}(t) \\
&= (-)^{n+1}\ h_\lambda^{(-n-2)}(t) f^{(n+1)}(t)\Big|_a^b + (-)^{n+2} \int_a^b dt\ h_\lambda^{(-n-2)}(t) f^{(n+2)}(t) \\
&\overset{\lambda \to \lambda_0}{=} \mathcal{O}(\phi_{n+1}(\lambda))
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung können abgeschwächt werden, indem $f^{(n)} \in \mathcal{C}$ nur für $n = 0, 1, \ldots, N+1$ gelte und $f^{(N+2)}$ stückweise stetig sei. Dann muss das letzte Integral in der Abschätzung auf die stückweise stetigen Teile aufgeteilt werden.

Beispiel zur partiellen Integration I

Beispiel

Gesucht ist das asymptotische Verhalten für $\lambda \to \infty$ für

$$I(\lambda) = \int_a^b dt\ t^\lambda f(t), \quad 0 \leq a < b \tag{65}$$

mit einer hinreichend geeigneten Funktion $f(t)$.

Es folgt mit:

$$h_\lambda(t) = t^\lambda \qquad \Longrightarrow \qquad h_\lambda^{(-n-1)}(t) = \frac{t^{\lambda+n+1}}{\prod_{i=0}^{n}(\lambda+i+1)}, \tag{66}$$

und

$$S_N^I(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} \phi_n(\lambda) \left(f^{(n)}(b) - \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda+n+1} f^{(n)}(a) \right) \tag{67}$$

mit

$$\phi_n(\lambda) = \frac{(-)^n b^{\lambda+n+1}}{\prod_{i=0}^{n}(\lambda+i+1)} \tag{68}$$

Beispiel zur partiellen Integration II

wobei $\phi_n(\lambda)$ eine asymptotische Funktionenfolge ist, denn es gilt:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\phi_{n+1}(\lambda)}{\phi_n(\lambda)} = -\lim_{\lambda\to\infty} \frac{b^{\lambda+n+2}\prod_{i=0}^{n}(\lambda+i+1)}{b^{\lambda+n+1}\prod_{i=0}^{n+1}(\lambda+i+1)} = -\lim_{\lambda\to\infty}\frac{b}{\lambda+n+2} = 0, \quad b\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$$

Der Betrag des Fehlers lautet:

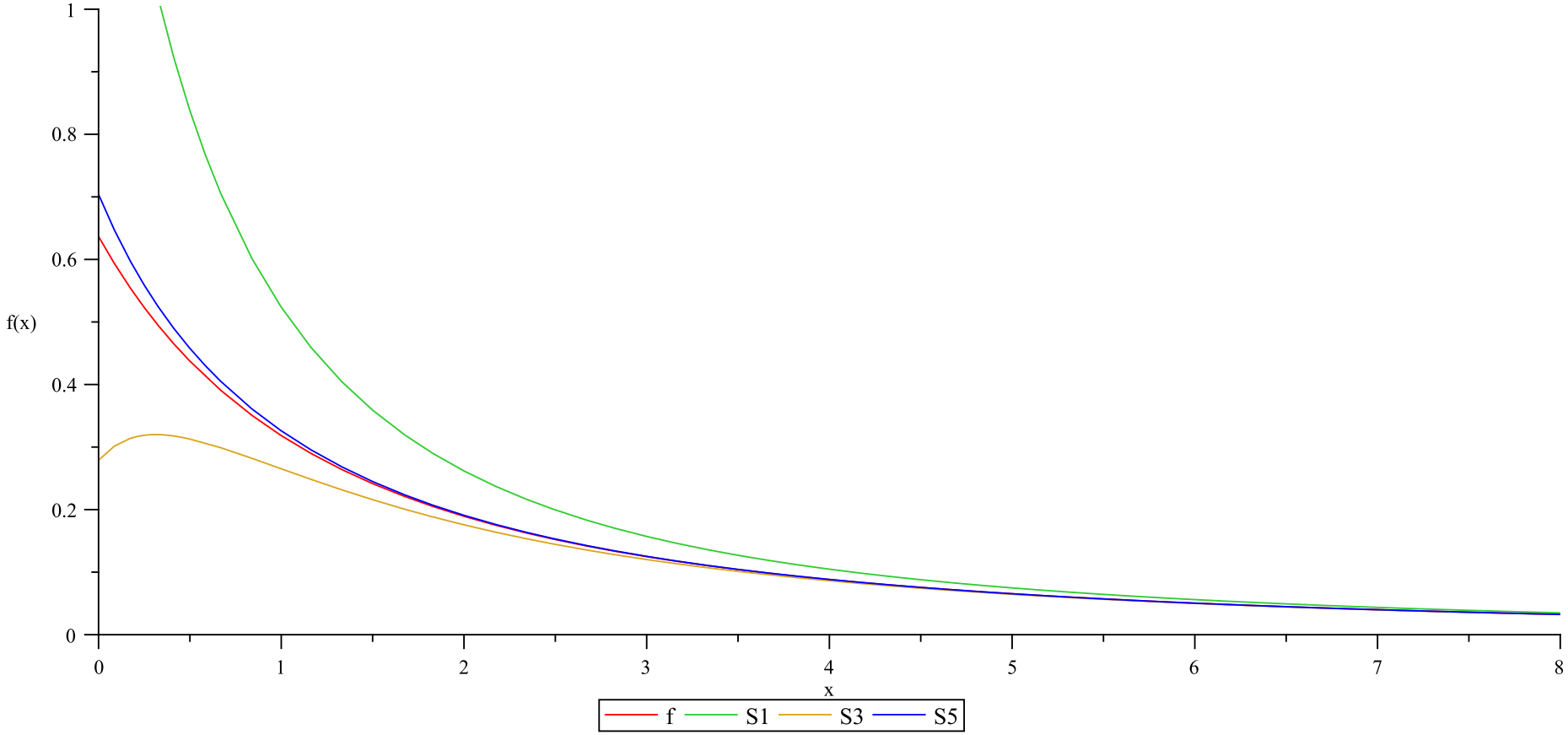
$$|\mathcal{E}_N^I(\lambda)| = \frac{1}{\prod_{i=0}^{N}(\lambda+i+1)}\left|\int_a^b dt\ t^{\lambda+N+1} f^{(N+1)}(t)\right|.$$

Wählen wir als illustrierendes Beispiel: $a=0, b=1$ und $f(t)=\sin(\pi t)$, so folgt bis $N=5$:

$$S_5^I(\lambda) = \frac{\pi}{(\lambda+1)(\lambda+2)} - \frac{\pi^3}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)} + \frac{\pi^5}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+6)}$$

$$|\mathcal{E}_5^I(\lambda)| = \frac{1}{\prod_{i=0}^{5}(\lambda+i+1)}\left|\int_0^1 dt\ t^{\lambda+5+1}\partial_{5+1}\sin(\pi t)\right| \le \frac{\pi^6}{\prod_{i=0}^{6}(\lambda+i+1)}$$

Beispiel zur partiellen Integration III



Die Abbildung zeigt die Güte der asymptotischen Entwicklung. In diesem Beispiel erhalten wir eine konvergente Entwicklung: $\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_N^I(\lambda) = 0,\ \forall\lambda > 0$. Dies deutet sich schon in der Abbildung für $N = 5$ an.
Zusammengefasst erhalten wir in die explizite Darstellung des Integrals:

$$\int_0^1 dt\ t^\lambda \sin(\pi t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \prod_{i=0}^{2n+1} \frac{\pi}{\lambda + i + 1}$$

Beispiel zur partiellen Integration IV

Beispiel

Gesucht ist das asymptotische Verhalten für $\lambda \to \infty$ für

$$I(\lambda) = \int_0^1 dt\ (1-t^2)^\lambda f(t), \tag{69}$$

mit einer hinreichend geeigneten Funktion $f(t)$.

Zunächst kann per Induktion gezeigt werden:

$$h_\lambda^{(-n-1)}(t) = \frac{(-)^{n+1}}{2(n!)} \int_t^1 dt'(t'-t)^n(1-t'^2)^\lambda$$

Daraus folgt: $h_\lambda^{(-n-1)}(1) = 0$ und

$$h_\lambda^{(-n-1)}(0) = \frac{(-)^{n+1}}{2(n!)} \int_0^1 dt'(t')^n(1-t'^2)^\lambda = \frac{(-)^{n+1}}{2(n!)} \int_0^1 dt t^{(n-1)/2}(1-t)^\lambda = \frac{(-)^{n+1}}{2(n!)} B((n+1)/2, 1+\lambda)$$

Drücken wir nun die Betafunktion durch Γ-Funktionen aus, so bekommen wir:

$$\int_0^1 dt\ (1-t^2)^\lambda f(t) \overset{\lambda\to\infty}{\rightsquigarrow} \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{2(n!)} \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma((n+3)/2+\lambda)} \doteq S'_\infty(\lambda)$$

Verwendet man für das asymptotische Verhalten der Γ-Funktion die Entwicklung:

$$\Gamma(x) \overset{x\to\infty}{\rightsquigarrow} \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-1/2}(1 + 1/12x + O(x^{-2}))$$

Beispiel zur partiellen Integration V

so folgt daraus:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma((n+3)/2+\lambda)} = \frac{1}{\lambda^{(n+1)/2}} \doteq \phi_n(\lambda)$$

und damit ist $\phi_n(\lambda)$ ebenso eine asymptotische Funktionenfolge und es gilt:

$$\int_0^1 dt\,(1-t^2)^\lambda f(t) \overset{\lambda\to\infty}{\rightsquigarrow} \hat{S}^I_\infty(\lambda) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^f_n}{\lambda^{(n+1)/2}}$$

Die Koeffizienten können bestimmt werden über:

$$\alpha^I_0 = \lim_{\lambda\to\infty} S^I_\infty(\lambda)\lambda^{1/2} \qquad \wedge \qquad \alpha^f_n = \lambda^{(n+1)/2}(S^I_\infty(\lambda) - \hat{S}^I_{n-1}(\lambda))$$

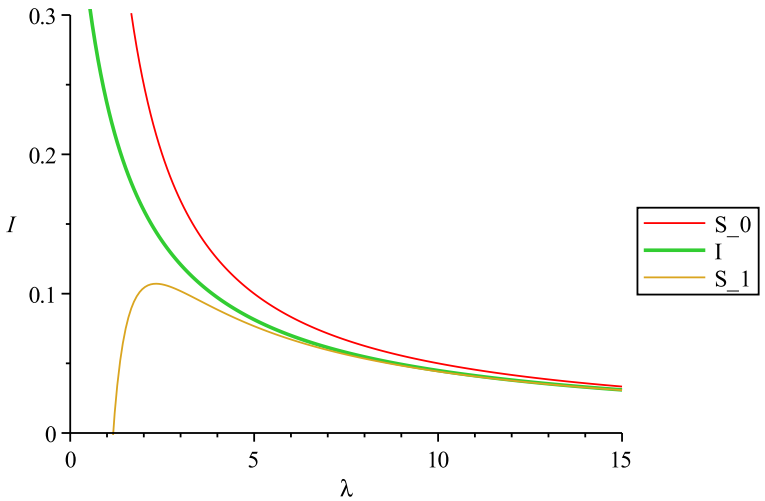
Die asymptotische Reihe bis zur dritten Ordnung lautet:

$$\hat{S}^I_\infty(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{f^{(0)}(0)}{\lambda^{1/2}} + \frac{f^{(1)}(0)}{2\lambda} + \frac{\sqrt{\pi}}{16}\frac{2f^{(2)}(0)-3f^{(0)}(0)}{\lambda^{3/2}} + \frac{f^{(3)}(0)-6f^{(1)}(0)}{12\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-5/2})$$

Betrachten wir explizit ein Beispiel:

$$f(t) \doteq \sin(t)$$

$$\Longrightarrow \qquad \hat{S}^I_\infty(\lambda) = +\frac{1}{2\lambda} - \frac{7}{12\lambda^2} + \ldots$$



Partielle Integration - $h_\lambda(t) = h(\lambda t)$ I

Als nächste Klasse von Integralen, die mittels partieller Integration in eine asymptotische Reihe entwickelt werden können, vermittelt das folgende Theorem.

Theorem

Es sei $f^{(n)} \in \mathcal{C}([a,b])$ für $n = 0, 1, \ldots, N+2$, desweiteren sei eine Funktion h, sowie eine asymptotische Funktionenfolge $\{\phi_k(\lambda)\} \in \mathcal{C}([a,b])$ für $\lambda \to \infty$ gegeben, so dass gilt:

$$|h^{(-n)}(\lambda t)| \leq \alpha_n(t)\phi_n(\lambda), \quad n = 0, 1, \ldots, N+1, \tag{70}$$

wobei $\alpha_n \in \mathcal{C}([a,b])$, und es gelte:

$$\frac{\phi_{n+1}(\lambda)}{\lambda} \overset{\lambda\to\infty}{=} \mathcal{O}(\phi_n(\lambda)), \quad n = 0, 1, \ldots, N+1. \tag{71}$$

Dann gilt:

$$\int_a^b dt\; h(\lambda t) f(t) \overset{\lambda\to\infty}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-)^n}{\lambda^{n+1}} \left(h^{(-n-1)}(\lambda b) f^{(n)}(b) - h^{(-n-1)}(\lambda a) f^{(n)}(a) \right) + \mathcal{E}_N^I(\lambda) \tag{72}$$

mit $\mathcal{E}_N^I(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-N-2}\phi_{N+2}(\lambda))$ aus Gleichung (23).

Die asymptotische Folge ist damit $\phi_n(\lambda)/\lambda^n$.

Partielle Integration - $h_\lambda(t) = h(\lambda t)$ II

Beweis: Zum Beweis des Theorems schätzen wir den Restterm $\mathcal{E}_n^I(\lambda)$, $n = 0, 1, \ldots, N$ für $\lambda \to \infty$ ab.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n^I(\lambda) &= \frac{(-)^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \int_a^b dt\ h^{(-n-1)}(\lambda t) f^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{(-)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\ h^{(-n-2)}(\lambda t) f^{(n+1)}(t)\Big|_a^b + \frac{(-)^{n+2}}{\lambda^{n+2}} \int_a^b dt\ h^{(-n-2)}(\lambda t) f^{(n+2)}(t)\end{aligned}$$

Nun gilt nach Voraussetzung, dass $h^{(-n)}(\lambda t)/\lambda^n$ eine asymptotische Folge der Ordnung $\phi_n(\lambda)/\lambda^n$ bildet. Damit ist der erste Term von Ordnung $\phi_{n+2}(\lambda)/\lambda^{n+2}$. Der zweite Integralterm kann stückweise stetig betrachtet werden. Da $f^{(N+2)}$ stetig ist, ist insgesamt das Integral ebenso von Ordnung: $\phi_{n+2}(\lambda)/\lambda^{n+2}$.
Integrale vom Typ $h(\lambda t)$ sind etwa:

- Fouriertransformation:

$$I_F(\lambda) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ e^{\pm \imath \lambda t} f(t), \qquad \lambda > 0 \tag{73}$$

- Laplace-Transformation:

$$I_L(\lambda) \doteq \int_0^{+\infty} dt\ e^{-\lambda t} f(t), \qquad \lambda > 0 \tag{74}$$

- Hankel-Transformation:

$$I_H(\lambda) \doteq \int_0^{+\infty} dt\ J_\nu(\lambda t)\sqrt{\lambda t} f(t) \qquad \lambda > 0 \tag{75}$$

Fouriertransformation I

Fouriertransformation

Die allgemeine Fouriertransformation:

$$I(\lambda) = \int_a^b dt\ e^{\imath\lambda t} f(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{76}$$

ergibt mit $h^{(-n)}(\lambda t) = e^{\imath\lambda t}/(\imath\lambda)^n$ und der Gleichung (72) die asymptotische Entwicklung:

$$I(\lambda) \overset{\lambda\to\infty}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-)^n}{(\imath\lambda)^{n+1}} \left(f^{(n)}(b) e^{\imath\lambda b} - f^{(n)}(a) e^{\imath\lambda a} \right) + \frac{(-)^{n+1}}{(\imath\lambda)^{n+1}} \int_a^b dt\ e^{\imath\lambda t} f^{(n+1)}(t). \tag{77}$$

Ist $\lim_{t\to a^+} f^{(n)}(t) = \lim_{t\to b^-} f^{(n)}(t),\ n = 0, 1, \ldots N$, so folgt daraus, dass $I(\lambda) \overset{\lambda\to\infty}{=} \mathcal{O}(\lambda^{-N-1})$, eine Größenabschätzung, die gelegentlich von Nutzen sein kann. Durch Aufspaltung von Real- und Imaginärteil erhält man die Fouriertransformation für $\cos(\lambda t)$ bzw. $\sin(\lambda t)$.

Beispiel

$$I(\lambda) = \int_0^1 dt\ \frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}}. \tag{78}$$

Die Voraussetzungen des Theorems sind zunächst nicht erfüllt.

Fouriertransformation II

Wie man sich schnell überzeugt existiert dieses Integral für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Betrachten wir nun das asymptotische Verhalten für $\lambda \to \infty$, so sehen wir, wenn wir Gleichung (72) anwenden wollen, dass $f(t) = t^{-1/2}$ und alle Ableitungen an der unteren Grenze divergieren. Demnach ist die Voraussetzung der Stetigkeit an der Integrationsgrenze verletzt. Der Satz kann jedoch nach ein paar Umformungen angewendet werden. Hierzu wählen wir ein beliebig kleines fest vorgegebenes $0 < \epsilon < 1$ und schreiben:

$$
\begin{aligned}
I(\lambda) &= \int_0^\epsilon dt\, \frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}} + \underbrace{\int_\epsilon^1 dt\, \frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}}}_{\doteq I_1(\lambda)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\epsilon\lambda} d\tau\, \frac{\sin(\tau)}{\sqrt{\tau}} + I_1(\lambda) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \underbrace{\int_0^\infty d\tau\, \frac{\sin(\tau)}{\sqrt{\tau}}}_{=\sqrt{\pi/2}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\epsilon\lambda}^\infty d\tau\, \frac{\sin(\tau)}{\sqrt{\tau}}}_{\doteq I_2(\lambda)} + I_1(\lambda) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} + I_1(\lambda) - I_2(\lambda)
\end{aligned}
$$

Nun werden die beiden einzelnen Integrale $I_1(\lambda)$ und $I_2(\lambda)$ betrachtet, für die dann die Voraussetzungen wieder erfüllt sind:

$$
I_1(\lambda) - I_2(\lambda) = \int_\epsilon^1 dt\, \frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}} - \int_{\epsilon\lambda}^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin(\tau)}{\sqrt{\tau}} = \left(\int_\epsilon^1 - \int_\epsilon^\infty \right) dt\, \frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}} = -\int_1^\infty dt\, \frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}}
$$

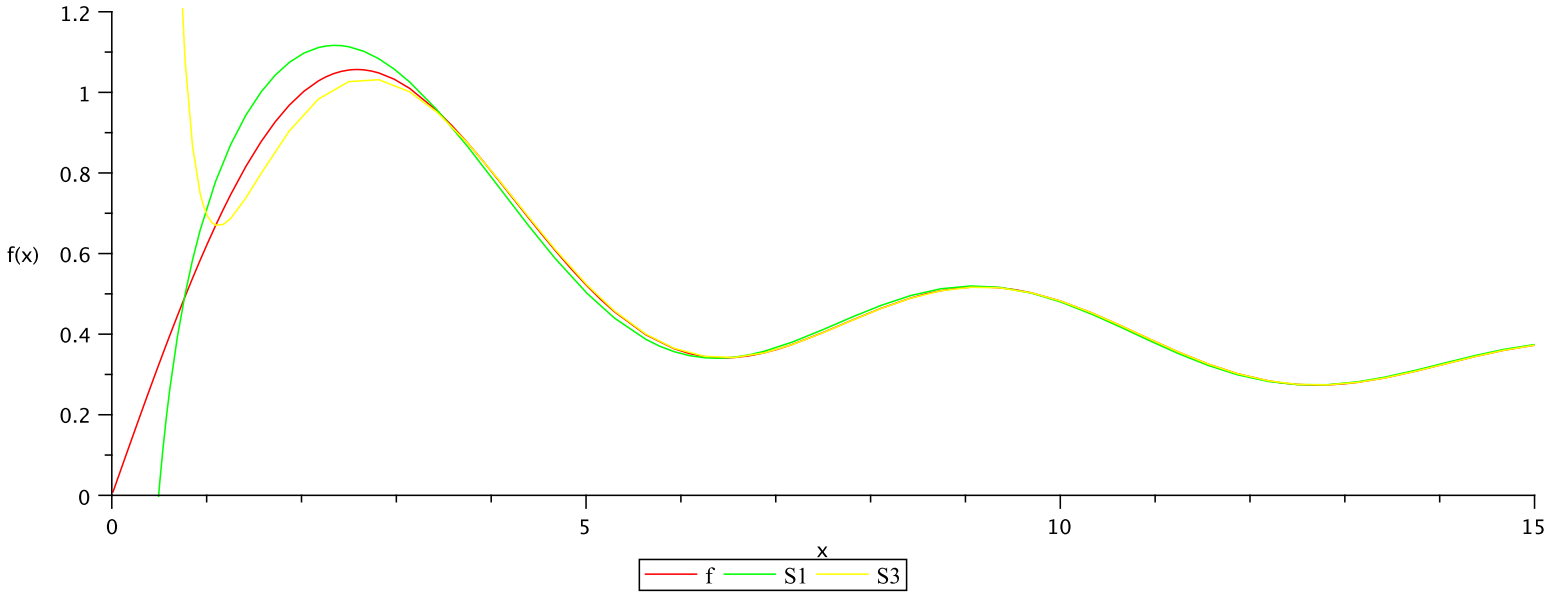
Fouriertransformation III

$$I_1(\lambda) - I_2(\lambda) \overset{\lambda\to\infty}{=} -\sum_{n=0}^{N} \sin^{-(n+1)}(\lambda t)(t^{-1/2})^{(n)}\Big|_1^{\infty} + \mathcal{E}_N(\lambda)$$

$$\overset{N\to\infty}{=} \cos(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n-1)!!}{2^{2n}}\frac{(-)^{n+1}}{\lambda^{2n+1}} + \sin(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)!!}{2^{2n+1}}\frac{(-)^{n+1}}{\lambda^{2n+2}}$$

wobei wir gesetzt haben: $(-5)!! = (-3)!! = 1$. Zusammengefasst ergibt sich:

$$\int_0^1 dt\,\frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}} \overset{\lambda\to\infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} + \cos(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n-1)!!}{2^{2n}}\frac{(-)^{n+1}}{\lambda^{2n+1}} + \sin(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)!!}{2^{2n+1}}\frac{(-)^{n+1}}{\lambda^{2n+2}}$$



Laplace-Transformation

Behauptung

Es sei $0 \leq a < b$, dann gilt für die asymptotische Entwicklung für $\lambda \to \infty$:

$$I(\lambda) = \int_a^b dt\ e^{-\lambda t} f(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda^{n+1}} f^{(n)}(a) + \mathcal{O}(e^{-b\lambda}) \tag{79}$$

Beweis:

$$I(\lambda) \overset{\lambda \to \infty}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{-1}{\lambda^{n+1}} \left(f^{(n)}(b) e^{-b\lambda} - f^{(n)}(a) e^{-a\lambda} \right) + \frac{-1}{\lambda^{n+1}} \int_a^b dt\ e^{-\lambda t} f^{(n+1)}(t).$$

Beachtet man aber, dass gilt $\lim_{\lambda \to \infty} e^{-(b-a)\lambda} \lambda^n = 0,\ n = 0, 1, \ldots$, so folgt die Behauptung.

Laplace-Transformation

Die Laplacetransformation ergibt sich in diesem Ausdruck für $a = 0$ und $b = \infty$ und wir erhalten in diesem Fall die Darstellung:

$$\int_0^\infty dt\ e^{-\lambda t} f(t) \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\lambda^{n+1}}, \quad \lambda > 0. \tag{80}$$

Watson-Lemma I

Lemma (Watson-Lemma)

Gegeben sei eine Funktion $f(t)$, die auf $[0,\infty[$ absolut integrierbar ist und das folgende asymptotische Verhalten besitzt:

$$f(t) \overset{t\to\infty}{=} \mathcal{O}(e^{\alpha t}),\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad \wedge \qquad f(t) \overset{t\to 0^+}{\rightsquigarrow} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{a_n}, \quad \Re(a_{n+1}) > \Re(a_n) \tag{81}$$

Dann gilt:

$$\int_0^\infty dt\ f(t)e^{-\lambda t} \overset{\lambda\to\infty}{\rightsquigarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \Gamma(a_n+1)}{\lambda^{a_n+1}} \tag{82}$$

Beweis: Formal erfolgt das Ergebnis durch die Integration der Funktion f über die asymptotische Reihenentwicklung. Jedoch muss beachtet werden, dass dies die Reihenentwicklung für $t \to 0$ ist. Deswegen muss sichergestellt werden, dass die Integrale existieren, da die obere Grenze unendlich ist. Es gilt:

$$\int_0^\infty dt\ f(t)e^{-\lambda t} = \int_0^R dt\ f(t)e^{-\lambda t} + \int_R^\infty dt\ f(t)e^{-\lambda t} = I_1(\lambda) + I_2(\lambda)$$

Da f beschränkt ist und asymptotisch geht wie $\mathcal{O}(e^{\alpha t})$, existiert eine Konstante k, sodass gilt:

$$|f| \leq ke^{\alpha t} \qquad \overset{\lambda\to\infty}{\Longrightarrow} \qquad |I_2(\lambda)| \leq \int_R^\infty dt|f(t)|e^{-\lambda t} \leq \frac{k}{\lambda-\alpha} e^{-R(\lambda-\alpha)} = \mathcal{O}(e^{-R(\lambda-\alpha)})$$

Watson-Lemma II

Nun gilt:

$$\int_0^R dt\, t^{a_n} e^{-\lambda t} = \int_0^\infty dt\, t^{a_n} e^{-\lambda t} - \int_R^\infty dt\, t^{a_n} e^{-\lambda t} \overset{\lambda\to\infty}{=} \frac{\Gamma(1+a_n)}{\lambda^{1+a_n}} + \mathcal{O}(e^{-\lambda R}) \tag{83}$$

Betrachten wir nun die asymptotische Reihe N-ter Ordnung für $f(t)$:

$$f(t) \overset{t\to 0}{=} \sum_{n=0}^{N} c_n t^{a_n} + \mathcal{E}_N(t), \qquad \mathcal{E}_N(t) = \mathcal{O}(t^{\Re(a_N)+1}), \quad \forall N$$

und integrieren diese:

$$\int_0^R f(t) e^{-\lambda t} = \sum_{n=0}^{N} c_n \frac{\Gamma(1+a_n)}{\lambda^{1+a_n}} + \mathcal{O}(e^{-\lambda R}) + \int_0^R \mathcal{E}_N(t) e^{-\lambda t}$$

Das letzte Integral schätzen wir ab und benutzen dabei, dass ein $k_N > 0$ existiert mit: $|\mathcal{E}_N(t)| \leq k_N t^{\Re(a_{N+1})}$:

$$\left|\int_0^R \mathcal{E}_N(t) e^{-\lambda t}\right| \leq k_N \left|\int_0^R t^{\Re(a_{N+1})} e^{-\lambda t}\right| \leq k_N \left|\int_0^\infty t^{\Re(a_{N+1})} e^{-\lambda t}\right| = k_N \frac{\Gamma(1+\Re a_{N+1})}{\lambda^{1+\Re a_{N+1}}}$$

Damit folgt insgesamt:

$$\int_0^\infty dt\, f(t) e^{-\lambda t} = \sum_{n=0}^{N} c_n \frac{\Gamma(1+a_n)}{\lambda^{1+a_n}} + \mathcal{O}(\lambda^{-(1+\Re a_{N+1})}), \qquad \forall N$$

Weil dies für alle N gilt, folgt die Entwicklung (82).

Sattelpunktmethode

Aufgabenstellung

Wir betrachten im Folgenden komplexe Wegintegrale, die von einem Parameter λ abhängen:

$$I(\lambda) \doteq \int_\gamma dz \ \exp(\lambda w(z)) f(z), \tag{84}$$

wobei γ ein Weg in der komplexen $\mathbb{C}$-Ebene darstellt. Interessiert sind wir am Verhalten für $\lambda \to \infty$. Die Funktionen $g(z)$ und $w(z)$ werden als holomorphe Funktionen auf einem Gebiet $\mathbb{G}$ vorausgesetzt. Der Integrationsweg soll ein glatter Weg in $\mathbb{G}$ sein.

- Die bisher betrachteten Laplace- und Fourier-Integrale sind Spezialfälle. Das asymptotische Verhalten wird durch die Endpunkte des Integrationsweges bestimmt.
- Bei der Sattelpunktsmethode wird das asymptotische Verhalten durch einen speziellen Punkt (*stationärer Punkt*) des Integrationsweges bestimmt.
- Wir werden typischerweise kein systematisches Verfahren erhalten um sukszessive höhere Ordnungen eines asymptotischen Verhaltens zu erzeugen.
- Im Folgenden verwenden wir die Notation:

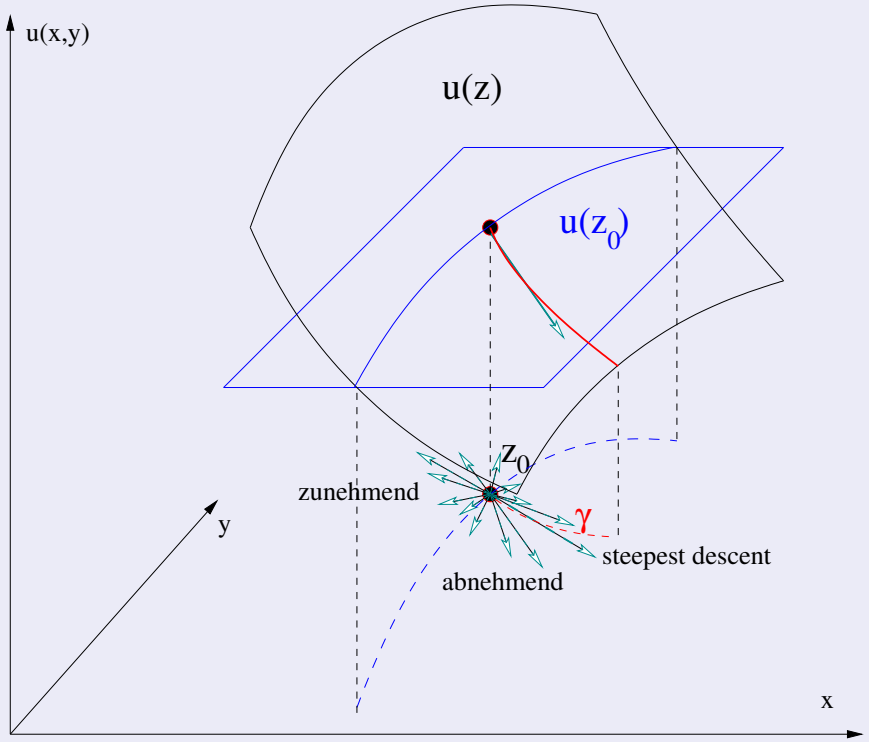
$$z = x + \imath y \qquad \wedge \qquad w(z) \doteq u(x,y) + \imath v(x,y) \tag{85}$$

- In einem ersten Schritt werden wir den Integrationsweg charakterisieren.

Steepest descent I

Definition (Steepest descent)

Es sei $z_0 \in \mathbb{G}$ und eine Funktion $w = u + \imath v$ auf $\mathbb{G}$ gegeben. Wir nennen eine Richtung ausgehend von z_0 eine **abnehmend (zunehmend)** Richtung, wenn $u(x, y)$ in z_0 kleiner (größer) wird. Wir nennen eine Kurve γ in $\mathbb{G}$ eine **abnehmende (zunehmende) Kurve**, wenn der Tangentialvektor der Kurve eine abnehmende (zunehmende) Richtung ist. Wir nennen eine abnehmende (zunehmende) Kurve, **maximal abnehmend (zunehmend)**, wenn die Abnahme (Zunahme) von $u(x, y)$ entlang dieser Kurve maximal ist. Einen solchen Weg nennt man auch **path of steepest descent (ascent)**.



Behauptung: *Steepest descent/ascent*

Für *steepest descent*-Wege γ durch $z_0 \in \mathbb{G}$ einer holomorphen Funktionen $w = u + \imath v$ auf $\mathbb{G}$ gilt:

$$v(z_0) = v(z), \qquad \forall z \in \gamma \subset \mathbb{G} \tag{86}$$

Steepest descent II

Beweis: Wir betrachten die folgende Variation der Funktion w in der Nähe von $z_0 \in \mathbb{G}$:

$$\delta w \equiv \delta u + \imath \delta v \doteq w(z) - w(z_0) \tag{87}$$

Nun beachten wir, dass $w(z)$ holomorph in z_0 ist und entwickeln in einer Umgebung um z_0 und nehmen an, dass der erste nicht verschwindende Term der Taylorentwicklung die Ordnung n ist:

$$w(z) = w(z_0) + \frac{(z - z_0)^n}{n!} w^{(n)}(z_0) + \mathcal{O}((z - z_0)^{n+1}) \tag{88}$$

und für das Betragsquadrat gilt:

$$|\delta u|^2 + |\delta v|^2 = |\delta w|^2 = |w(z) - w(z_0)|^2 = |z - z_0|^{2n} |w^{(n)}(z_0)/n!|^2 (1 + \mathcal{O}(z - z_0))$$

und mit $c^2 = |w^{(n)}(z_0)/n!|^2 > 0$ haben wir die Ungleichung:

$$|\delta u|^2 \leq |\delta w|^2 = |z - z_0|^{2n} c^2 (1 + \mathcal{O}(z - z_0))$$

Die Variation $|\delta u| = |u(z) - u(z_0)|$ wird maximal, wenn das Gleichheitszeichen gilt, was bedeutet: $\delta v = v(z) - v(z_0) = 0$. Für diese Wege gilt dann: $\delta w = \delta u$. Es sind dann je nach Vorzeichen *steepest descent*- oder *steepest ascent*-Wege.

Die Behauptung gibt nur eine notwendige Bedingung für den Imaginärteil der Funktion w an. Wie aber der genaue Weg des *steepest descent* aussieht, darüber sagt er nichts aus. Hierzu gibt das folgende Theorem Auskunft.

Steepest descent III

Theorem (*Steepest descent/ascent*)

Für eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{G}$, mit einer Taylorentwicklung:

$$w(z) = w(z_0) + \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \mathcal{O}((z - z_0)^{n+1}), \tag{89}$$

wobei die ersten $n-1$ Terme der Taylorentwicklung verschwinden. Diese Punkte nennen wir **Sattelpunkte** *der Ordnung $n-1$, wenn $n > 1$. Desweiteren definieren wir:*

$$w^{(n)}(z_0) = re^{\imath\alpha},\ r > 0 \qquad \wedge \qquad z - z_0 = \rho e^{\imath\theta},\ \rho > 0 \tag{90}$$

Dann sind die Wege des steepest descent/ascent in z_0 gebenen durch:

Steepest descent $n\theta = -\alpha + (2p+1)\pi, \qquad p = 0, 1, \ldots, n-1$

Steepest ascent $n\theta = -\alpha + 2p\pi, \qquad p = 0, 1, \ldots, n-1$

Constant u $n\theta = -\alpha + (p + 1/2)\pi, \qquad p = 0, 1, \ldots, 2n-1$

Beweis: Zunächst schreiben wir mit (89) um:

$$\delta w \doteq w(z) - w(z_0) = \frac{re^{\imath\alpha}}{n!}\rho^n e^{\imath n\theta}(1 + \mathcal{O}(\rho)) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\delta w}{\rho^n} = \frac{re^{\imath(\alpha+n\theta)}}{n!}(1 + \mathcal{O}(\rho))$$

Da für die Extrema gelten muss, dass $\delta w \in \mathbb{R}$, da $\Im w(z) = v(z_0) = const$ gilt, bedeutet dies:

$$\alpha + n\theta = (2p+1)\pi \qquad \text{(Steepest descent)} \qquad \wedge \qquad \alpha + n\theta = 2p\pi \qquad \text{(Steepest ascent)}$$

Im 1.Fall ist $\delta w > 0$, im 2.Fall $\delta w > 0$. Da $\theta = 2\pi p/n + const$ auf ein 2π-Interval beschränkt ist, folgt: $p = 0, 1, \ldots, n-1$. Ist $n\theta = -\alpha + (p + 1/2)\pi$, so ist $e^{\imath(\alpha+n\theta)}$ rein imaginär und gehört zu v und damit ist $\delta w = 0$ also $u(z) = u(z_0)$.

Topologie der steepest descent/ascent Wege I

Definition (Tal, Berg und Höhe)

Für eine gegebene Funktion $w(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$ und einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ sagen wir, dass ein Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ in einem Tal bzgl. z_0 liegt, wenn gilt $u(z_1) < u(z_0)$ und auf einem Berg, wenn gilt $u(z_1) > u(z_0)$. Ist $u(z_1) = u(z_0)$, so sagen wir, dass z_1 auf der gleichen Höhe liegt wie z_0.

Beispiel (Einfacher Sattelpunkt ($n = 2$))

$$w(z) = z^2 = x^2 - y^2 + \imath 2xy \tag{91}$$

Das Beispiel zeigt die Funktion $u(x, y) = x^2 - y^2$ (91):

$$w^{(1)}(z_0) = 2z_0 \qquad \wedge \qquad w^{(2)}(z_0) = 2$$

Betrachten wir zwei Punkte $z_0 = 0$ und $z_0 = (1 - \imath)/2$:

$$z_0^{(1)} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad n = 2 \qquad \wedge \qquad \alpha = 0$$

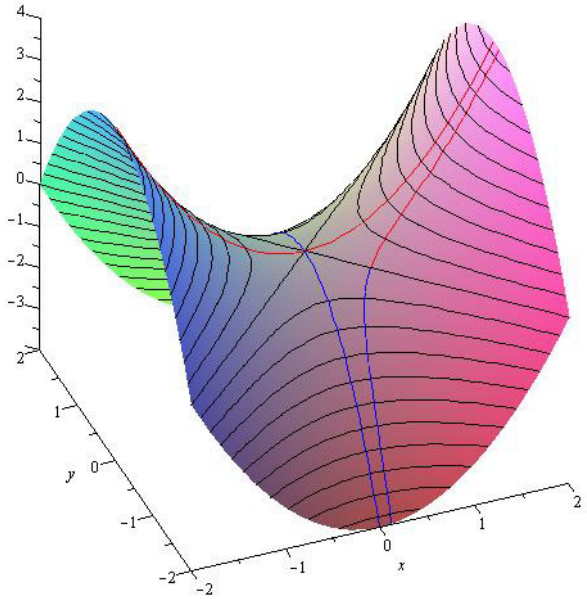
$$z_0^{(2)} = (1 - \imath)/2 \qquad \Longrightarrow \qquad n = 1 \qquad \wedge \qquad \alpha = -\pi/4$$

Die steepest descent/ascent Wege sind gegeben durch:

$$z_0^{(1)} : \{x = 0,\ y \in \mathbb{R}\} \quad \wedge \quad \{y = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$$

$$z_0^{(2)} : \{y = -1/4x | x > 1/2\} \quad \wedge \quad \{y = -1/4x | 0 < x < 1/2\}$$

Die steepest descent(blau)/ascent(rot) Wege sowie die Wege auf konstanter Höhe(schwarz) sind in der Grafik eingezeichnet.



Topologie der steepest descent/ascent Wege II

Beispiel (*Affensattel* ($n = 3$))

$$w(z) = z^3/3 = x^3/3 - xy^2 + \imath(yx^2 - y^3/3) \tag{92}$$

Betrachten wir den Punkt $z_0 = 0$, dann gilt:

$$w^{(1)}(z_0) = w^{(2)}(z_0) = 0 \qquad \wedge \qquad w^{(2)}(z_0) = 2$$

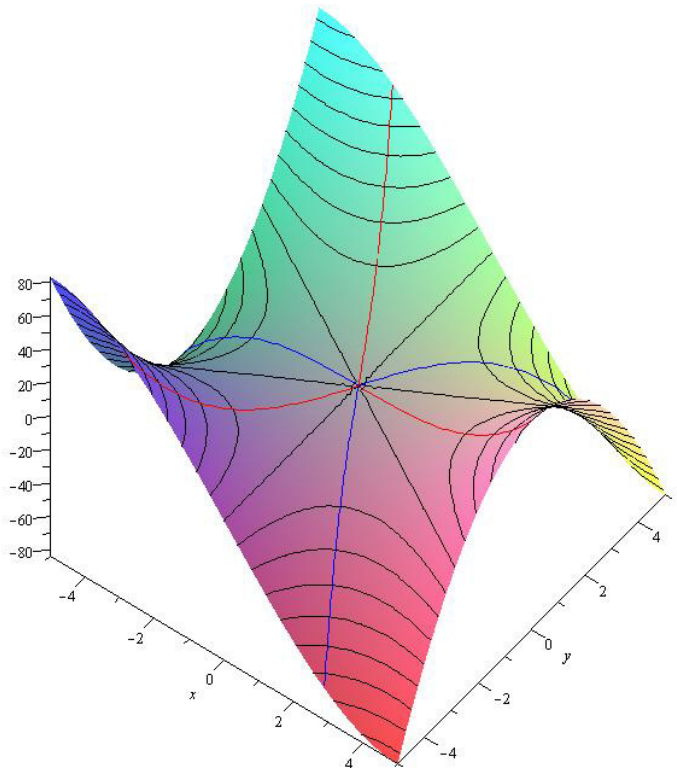
$$\Longrightarrow \qquad n = 3 \qquad \wedge \qquad \alpha = 0$$

Die steepest descent(blau)/ascent(rot) Wege sowie die Wege auf konstanter Höhe(schwarz) sind in der Grafik eingezeichnet und gegeben durch:

$$\{y = 0, x < 0\} \qquad \wedge \qquad \{y = 0, x < 0\}$$

$$\{y = \sqrt{3}x, x < 0\} \qquad \wedge \qquad \{y = \sqrt{3}x, x > 0\}$$

$$\{y = -\sqrt{3}x, x > 0\} \qquad \wedge \qquad \{y = -\sqrt{3}x, x < 0\}$$



Betrachten wir im Allgemeinen eine beliebige Funktion $w(z)$ mit einem die lokale Umgebung des Punktes z_0, dann sehen wir, dass die Täler und Berge sich abwechseln und durch Wege konstanter Höhe in u getrennt werden. Für eine bliebige Funktion $w(z)$ sind die steepest descent/ascent Wege durch $v_0 = v(x_0, y_0) = v(x, y)$ bestimmt. Letzteres ist im Allgemeinen eine implizite Funktion für $y = y(x)$ bzw. $x = x(y)$.

Sattelpunkte I

Beispiel

$$w(z) = z - z^3/3 = x - x^3/3 + xy^2 + \imath(y - yx^2 + y^3/3) \tag{93}$$

Für diese Funktion folgt:

$$w^{(1)}(z_0) = 1 - z_0^2 \qquad \wedge \qquad w^{(2)}(z_0) = -2z_0 \qquad \wedge \qquad w^{(3)}(z_0) = -2 \tag{94}$$

Damit ist ein einfacher Sattelpunkt in den Punkten $z_0 = \pm 1$ gegeben. In diesen Punkten gilt:

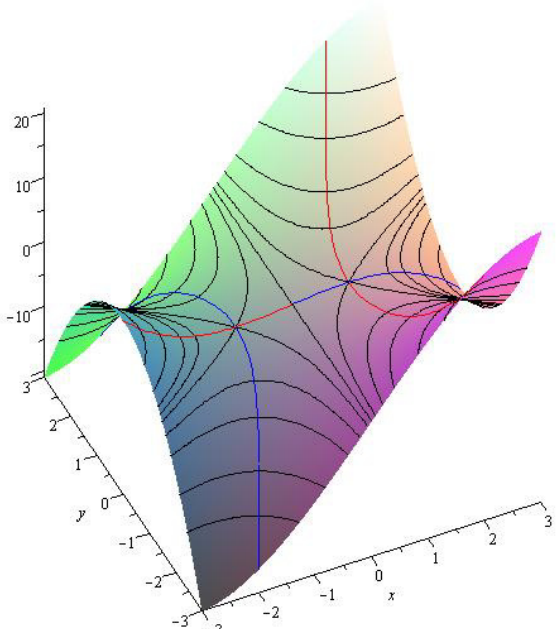
$$w(\pm 1) = \pm\frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad v(x,y) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = y(1 - x^2 + y^2/3) \tag{95}$$

Damit sind die steepest descent/ascent-Wege geben durch:

$$\{y = 0,\ x \in \mathbb{R}\} \tag{96}$$

$$\{y = +\sqrt{3}\sqrt{x^2 - 1}, |x| > 1\} \tag{97}$$

$$\{y = -\sqrt{3}\sqrt{x^2 - 1}, |x| > 1\} \tag{98}$$



Methode des steepest descent Weges I

Methode des steepest descent Weges

Gegeben sind auf einem Gebiet $\mathbb{G}$ holomorphen Funktionen $g(z)$ und $w(z)$. Das asymptotische Verhalten des komplexen Wegintegrals über dem Weg γ:

$$I(\lambda) = \int_\gamma dz\ g(z) exp(\lambda w(z)), \tag{99}$$

für $\lambda \to \infty$ erhält man durch den folgenden Algorithmus:

1. Identifizierung der *kritischen Punkte* des Integranden. Dies sind die Endpunkte der Integration, sowie die Sattelpunkte von $w(z)$.
2. Bestimme die steepest descent Wege aller kritischen Punkte.
3. Deformiere unter Verwendung des Cauchy-Integralsatz den ursprüngliche Integrationsweg γ zu den *steepest descent Wegen*.
4. Entwickele $w(z)$ um den gewählten Sattelpunkte des *steepest descent Weg* und stelle die asymptotische Reihe auf.
5. Summiere formal die asymptotische Reihe auf und verwende das *Watson Lemma*.

- Bei der Deformierung des Integrationswegs muss darauf geachtet werden, dass alle Teilwege richtig abgeschätzt werden.
- Punkt 4. ist im Allgemeinen eine schwierige Aufgabe, die niedrigste Ordnung kann jedoch einfach angebeben werden und folgt aus (89).
- Die Voraussetzungen zur Anwendbarkeit der Methode kann noch in verschiedenen Richtungen verallgemeinert werden.

Methode des steepest descent Weges II

Betrachten wir schematisch das Integral über einen *steepest descent Weg* γ_{z_0} mit:

$$(z-z_0)^n w^{(n)}(z_0)/n! = r\rho^n e^{\imath(n\theta+\alpha)} \doteq -\tau^2 < 0, \qquad \theta = (-\alpha+\pi(1+2p))/n,\ p = 0,1,\ldots,n-1$$

dann folgt formal für den Weg γ_{z_0}:

$$I(\lambda) = \int_\gamma dz\ g(z) exp(\lambda w(z))$$

wobei z_0 der Sattelpunkt von $w(z)$ ist, für den gilt: $w^{(1)}(z_0) = \ldots = w^{(n-1)}(z_0) = 0$. Führen wir die Substitution $t = -[w(z) - w(z_0)]$ ein dann erhalten wir:

$$I(\lambda) = e^{\lambda w(z_0)} \int_0^\infty dt\ G(t) e^{-\lambda t}, \tag{100}$$

mit

$$G(t) = \frac{g(z(t))}{-w^{(1)}(z(t))} \qquad \wedge \qquad z(t) = w^{-1}(w(z_0) - t) \tag{101}$$

Nehmen wir an, dass $G(t)$ um $t = 0$ die asymptotische Entwicklung besitzt:

$$G(t) \overset{t\to 0}{\rightsquigarrow} \sum_{n=0}^\infty c_n t^{a_n}, \qquad \Re a_{n+1} > \Re a_n$$

so folgt mit dem Watson-Lemma die asymptotische Entwicklung:

$$I(\lambda) \overset{\lambda\to\infty}{\rightsquigarrow} e^{\lambda w(z_0)} \sum_{n=0}^\infty c_n \frac{\Gamma(a_n+1)}{\lambda^{a_n+1}} \tag{102}$$

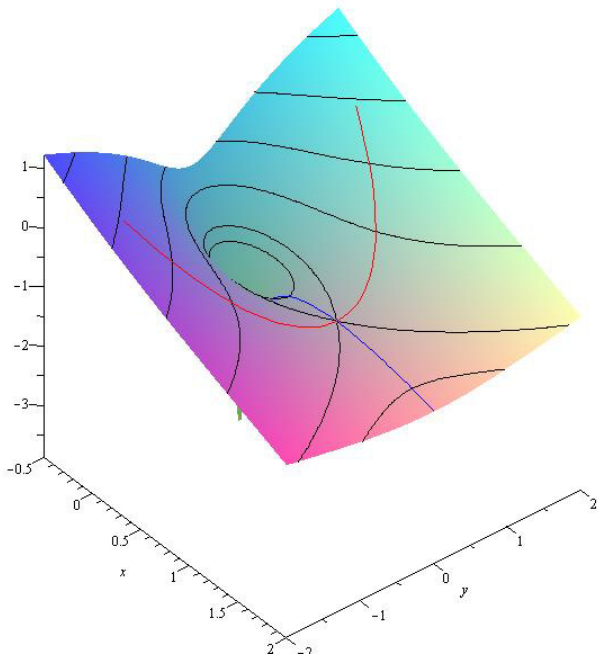
Beispiele zur Methode des Steepest descent I

Beispiel (Gamma-Funktion: $\Gamma(\lambda)$ $(\lambda \to \infty)$)

$$\Gamma(\lambda) \doteq \int_0^\infty dt\ e^{-t} t^{\lambda-1} \overset{\lambda\to\infty}{\rightsquigarrow} \sqrt{2\pi}\lambda^{\lambda-1/2}e^{-\lambda} \tag{103}$$

Zunächst bringen wir die Darstellung auf die gewünschte Form (99):

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda+1) &= \int_0^{+\infty} dt\ e^{-t+\lambda \ln t} \\ &= \lambda^{\lambda+1} \int_0^{+\infty} dt\ e^{\lambda(\ln t - t)} \doteq \lambda^{\lambda+1} I(\lambda)\end{aligned}$$



Damit ist $w(z) = \ln z - z$ und es gilt:

$$w^{(1)}(z) = \frac{1}{z} - 1 \qquad \wedge \qquad w^{(2)}(z) = -\frac{1}{z^2}$$

Es gibt einen einfachen Sattelpunkt bei $z_0 = 1$ und daraus folgt:

$$w^{(2)}(1) = -1 = 1e^{\imath\pi}$$

Daraus folgt für die *Steepest descent*-Paramter α und θ und p:

$$\alpha = \pi \qquad \wedge \qquad \theta = -\pi p,\ p = 0, 1$$

Beispiele zur Methode des Steepest descent II

Die *steepest-descent*-Wege lauten explizit:

$$p = 0 : \{y = 0,\ \infty > x > 1\}$$
$$p = 1 : \{y = 0,\ 0 < x < 1\}$$

Die Funktion $G(t)$ lautet:

$$G(t) = \frac{z(t)}{z(t)-1} = 1 + \frac{1}{z(t)-1}, \qquad t = z - 1 - \ln z = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(z-1)^n \tag{104}$$

Es gibt zwei steepest descent Wege. Der eine Wege ($p = 0$) bildet das Interval: $]1, \infty[\ni z \to t \in [0, \infty[$ ab, der andere ($p = 1$) bildet das Interval: $]1, 0[\ni z \to t \in [0, \infty[$ ab. Insgesamt haben wir dann einen Faktor 2 und in führender Ordnung ist:

$$G(t) \overset{t\to 0}{\rightsquigarrow} \frac{1}{\sqrt{2t}} + \mathcal{O}(t^{-1/2}) \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \wedge \qquad a_1 = -1/2$$

Daraus ergibt sich insgesamt das asymptotische Verhalten der Γ-Funktion:

$$\Gamma(\lambda+1) \overset{\lambda\to\infty}{\rightsquigarrow} 2\lambda^{\lambda+1} e^{\lambda w(1)} c_1 \frac{\Gamma(1/2)}{\lambda^{1/2}} = \sqrt{2\pi}\lambda^{\lambda+1/2} e^{-\lambda}$$

Um die nächsten Ordnungen zu bestimmen benötigen wir die Invertierung der Reihe (104). Dies werden wir in späteren Kapitel diskutieren.

Beispiele zur Methode des Steepest descent III

Beispiel (Airy-Funktion Ai(x) ($x \to \infty$))

$$\mathrm{Ai}(x) \doteq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt\ \cos(xt + t^3/3) \tag{105}$$

Zunächst einmal ist dies noch nicht von der benötigten Form (99), diese erhält man jedoch durch:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ (\cos(xt + t^3/3) + \imath \sin(xt + t^3/3)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \exp(\imath(xt + t^3/3))$$

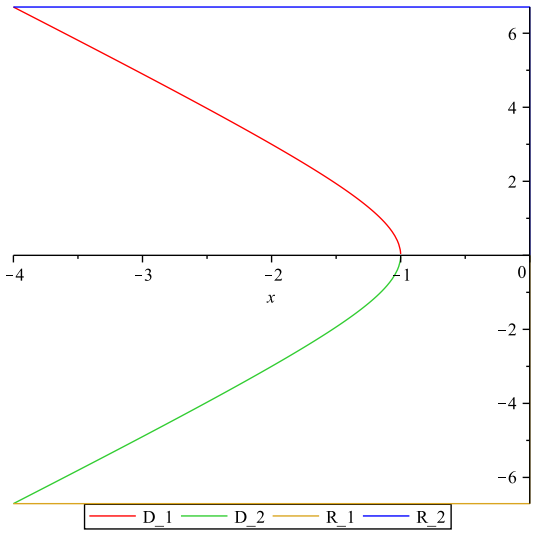
Dies kann noch mit der Substitution $t = -\imath\sqrt{x}z$ umgeformt werden in:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\imath 2\pi}\int_{-\imath\infty}^{+\imath\infty} dz\ \exp(x^{3/2}(z - z^3/3)) \overset{\lambda = x^{3/2}}{=} \frac{\lambda^{1/3}}{\imath 2\pi}\int_{-\imath\infty}^{+\imath\infty} dz\ \exp(\lambda(z - z^3/3))$$

Betrachten wir das Integral und verwenden den Cauchyintegralsatz. Der Weg über die Imaginäre Achse wird ersetzt durch die 4 Teilwege, so wie sie in der Grafik dargestellt sind. Die Wege $R_{1,2}$ liefern keinen Beitrag, da sie im unendlichen eines Tales liegen und dort bis auf den Punkt genau auf der imaginären Achse verschwinden. Dies kann auch explizit gezeigt werden, in dem diese Integrale:

$$I_{R_\pm} \doteq \int_{R_\pm} dz e^{\lambda(z - z^3/3)} = \int_0^{\sqrt{1+R^2/3}} dt\ e^{\lambda(\pm\imath R - t - (\pm\imath R - t)^3/3))}$$

abschätzt werden.



Beispiele zur Methode des Steepest descent IV

Es gilt:

$$|I_{R_\pm}| \leq \int_0^{\sqrt{1+R^2/3}} dt\, e^{-\lambda t(1+R^2/3-t^2/3)} \leq \int_0^{\sqrt{1+R^2/3}} dt\, e^{-\lambda t2(1+R^2/3)/3} = \mathcal{O}(R_\pm^{-2}) \overset{R_\pm \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

Damit verschwinden für $|R_\pm| \to \infty$ die Beiträge $I_{R_\pm}$ und übrig bleiben die steepest descent Wege über $D_\pm$, die den selben Beitrag liefern, so dass gilt:

$$\mathrm{Ai}(x) \overset{\lambda = x^{3/2}}{=} \frac{\lambda^{1/3}}{\imath 2\pi} 2 \int_{D_1} dz\ \exp(\lambda w(z)) = \frac{\lambda^{1/3}}{\imath\pi} e^{\lambda w(z_0)} e^{\imath\theta} \int_0^\infty dt \frac{\exp(-\lambda t)}{z^2(t)-1}$$

wobei $z(t) = w^{-1}(w(z_0) - t)$ gilt. Das asymptotische Verhalten ergibt sich aus dem Verhalten in der Nähe des Sattelpunktes $z_0 = -1$ für den gilt: $t = 0$. Damit erhalten wir in führender Ordnung nach Entwicklung um den Sattelpunkt in Richtung des steepest descent Weges ($\theta = \pi/2$):

$$\begin{aligned}\mathrm{Ai}(x) &\rightsquigarrow \frac{\lambda^{1/3}}{\pi} e^{-2\lambda/3} \int_0^\infty dt\ \exp(-\lambda t) \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ &\rightsquigarrow \frac{\lambda^{1/3}}{\pi} e^{-2\lambda/3} \frac{\Gamma(1/2)}{2\lambda^{1/2}}\end{aligned}$$

Setzen wir noch $\lambda = x^{3/2}$ ein, so folgt asymptotisch:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} + \mathcal{O}(e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} x^{-1/4}) \tag{106}$$

Steepest-descent-Approximation

Steepest-descent-Approximation

Für eine Funktion $g(z) \rightsquigarrow g_0(z-z_0)^{\beta-1}$ gilt die Sattelpunktsnäherung für den *Steepest-descent-Weg* γ_{z_0}:

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_{z_0}} dz\, g(z) e^{\lambda w(z)} \overset{\lambda\to\infty}{\rightsquigarrow} \frac{g_0}{n}\left(\frac{n!}{\lambda|w^{(n)}(z_0)|}\right)^{\beta/n} \Gamma(\beta/n) e^{\lambda w(z_0)} e^{\imath\frac{\beta}{n}([2p+1]\pi-\alpha)} \tag{107}$$

Mit $\theta = (\pi(2p+1)-\alpha)/n$ für den steepest descent Weg, substituieren wir:

$$\begin{aligned} t &\doteq -(w(z)-w(z_0)) \\ &= e^{-\imath(\theta n+\alpha)}\frac{w^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \mathcal{O}(|z-z_0|^{n+1}) = \frac{|w^{(n)}(z_0)|}{n!}|z-z_0|^n + \mathcal{O}(|z-z_0|^{n+1}) \end{aligned}$$

Bis zur Ordnung $\mathcal{O}((z-z_0)^n)$ gilt:

$$w^{(1)}(z) = \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!}w^{(n)}(z_0) = \frac{(z-z_0)^n w^{(n)}(z_0)}{n!}\frac{n}{z-z_0} = te^{\imath(\theta n+\alpha)}\frac{n}{|z-z_0|e^{\imath\theta}} = \frac{-tne^{-\imath(\pi(2p+1)-\alpha)/n}}{(tn!/w^{(n)}(z_0))^{1/n}}$$

zusammen mit dem asymptotischen Verhalten für $g(z) = g_0(z-z_0)^{\beta-1},\ \beta > 0$ folgt:

$$\frac{g(z)}{-w^{(1)}(z(t))} = \frac{g_0(z-z_0)^{\beta-1}}{tn/(z-z_0)} = \frac{g_0}{n}(n!/w^{(n)}(z_0))^{\beta/n} e^{\imath(\pi(2p+1)-\alpha)\beta/n} t^{\beta/n-1}$$

Setzen wir dieses asymptotische Verhalten ein, so ergibt sich:

$$I(\lambda) = e^{\lambda w(z_0)}\int_0^\infty dt\ G(t)e^{-\lambda t} \rightsquigarrow \frac{g_0}{n}e^{\lambda w(z_0)}(n!/w^{(n)}(z_0))^{\beta/n} e^{\imath(\pi(2p+1)-\alpha)\beta/n}\int_0^\infty dt\, t^{\beta/n-1}e^{-\lambda t}$$

Mit Hilfe des Watson-Lemmas folgt dann die Behauptung.

4. Asymptotische Entwicklung von Funktionen
   - Theorem von Bürmann
   - Theorem von Teixeira
   - Lagrange Theorem

Aufgabenstellung

Wir untersuchen die asymptotische Entwicklungen von Funktionen, und wollen im besonderen die Taylorentwicklung verallgemeinern.

Aufgabenstellung

Wie sehen für eine beliebige Funktion $f(z)$ die Koeffizienten α_n in der asymptotischen Entwicklung:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n [\phi(z) - \phi(z_0)]^n + \mathcal{E}_N(z, z_0), \tag{108}$$

aus und welche Voraussetzungen muss die Funktion $f(z)$ und $\phi(z)$ erfüllen.

Wenn die Funktion $\phi(z) = z$ ist, dann sind die $\alpha_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ die bekannten Taylorkoeffizienten und $\mathcal{E}_N(z, z_0)$ ist der Restterm in der Taylor-Entwicklung. Im Allgemeinen wird eine Entwicklung der Form (108) nicht global möglich sein, jedoch ist anzunehmen, dass dies lokal um einen Punkt $z = z_0$ und eine hinreichend kleine Umgebung möglich ist. Die Situation stellt sich dann wie in der Abbildung skizziert dar.

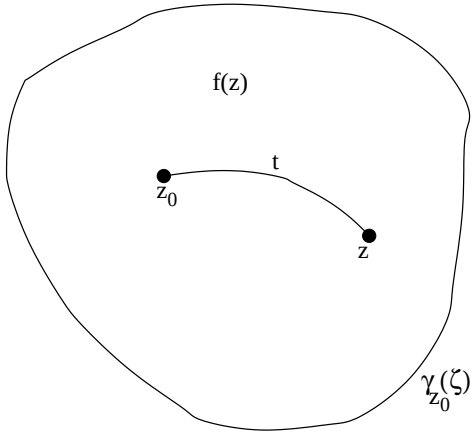


Figure : Ein Weg $\hat{\gamma}_{z_0 z}$, der komplett durch einen Weg $\gamma_{z_0}(\zeta)$ eingeschlossen wird.

Theorem von Bürmann I

Theorem (Bürmann)

Es sei eine auf einem Gebiet $\mathbb{G}_0$ um den Punkt $z = z_0$ holomorphe Funktion $f(z)$ gegeben. Desweiteren sei eine in $\mathbb{G}_0$ holomorphe Funktion $\psi(z)$ gegeben, die zusätzlich die Eigenschaft hat, dass $\psi(z) = \psi(\tau)$ für alle $z \in \mathbb{G}_0$ nur eine einfache Lösung bei $z = \tau$ und $\psi^{(1)}(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \hat{\gamma}_{z_0 z}$ hat. Dann existiert die Entwicklung:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{N} \frac{[\psi(z) - \psi(z_0)]^n}{n!} \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{n-1} f^{(1)}(\zeta) h_{z_0}(\zeta)^n \Bigg|_{\zeta = z_0} + \mathcal{E}_N(z, z_0) \tag{109}$$

mit

$$\mathcal{E}_N(z, z_0) = \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\hat{\gamma}_{z_0 z}} d\tau [\psi(\tau) - \psi(z_0)]^N \psi^{(1)}(\tau) \int_{\gamma_{z_0}} d\zeta \frac{f^{(1)}(\zeta)}{[\psi(\zeta) - \psi(z_0)]^N [\psi(\zeta) - \psi(\tau)]} \tag{110}$$

und

$$h_{z_0}(z) \doteq \frac{z - z_0}{\psi(z) - \psi(z_0)} \tag{111}$$

Beweis:
Mit Hilfe der Darstellung einer Stammfunktion über das Wegintegral und der Cauchy-Integralformel folgt:

$$f(z) - f(z_0) = \int_{\hat{\gamma}_{z_0 z}} d\tau \; f^{(1)}(\tau) = \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\hat{\gamma}_{z_0 z}} d\tau \int_{\gamma_{z_0}} d\zeta \; \frac{f^{(1)}(\zeta)}{\zeta - \tau} \tag{112}$$

Theorem von Bürmann II

Da die Funktion $\psi(z)$ in $\mathbb{G}_0$ holomorph ist existiert eine stetige Funktion Δ_ψ mit der Eigenschaft $\Delta_\psi(z_0) = \psi'(z_0) \equiv \psi^{(1)}(z_0)$, so dass in einer hinreichend kleinen Umgebung gilt:

$$\psi(\zeta) = \psi(\tau) + (\zeta - \tau)\Delta_\psi(\zeta), \qquad \Delta_\psi(\tau) = \psi^{(1)}(\tau). \tag{113}$$

Da nach Voraussetzung gelten soll: $\psi^{(1)}(\tau) \neq 0$, folgt zusammen mit:

$$\zeta - \tau = \frac{\psi(\zeta) - \psi(\tau)}{\Delta_\psi(\zeta)} \tag{114}$$

nach Einsetzen in Gleichung (112):

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\hat{\gamma}_{z_0 z}} d\tau \int_{\gamma_{z_0}} d\zeta \frac{f^{(1)}(\zeta)\Delta_\psi(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi(\tau)}, \tag{115}$$

Nach Voraussetzung ist $\psi(z)$ in z_0 holomorph, sodass auch $\Delta_\psi(\zeta)$ holomorph ist und um $\zeta = \tau$ entwickelt werden kann:

$$\Delta_\psi(\zeta) = \Delta_\psi(\tau) + (\zeta - \tau)\tilde{\Delta}_\psi(\zeta) \tag{116}$$

mit einer holomorphen Funktion $\tilde{\Delta}_\psi(\zeta)$. Insgesamt ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\hat{\gamma}_{z_0 z}} d\tau \int_{\gamma_{z_0}} d\zeta \frac{f^{(1)}(\zeta)\Delta_\psi(\tau)}{\psi(\zeta) - \psi(\tau)} + \int_{\hat{\gamma}_{z_0 z}} d\tau \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_{z_0}} d\zeta \frac{f^{(1)}(\zeta)(\zeta - \tau)\tilde{\Delta}_\psi(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi(\tau)} \\ &= \int_{\hat{\gamma}_{z_0 z}} d\tau \psi^{(1)}(\tau) \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_{z_0}} d\zeta \frac{f^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi(\tau)} \end{aligned} \tag{117}$$

Dabei verschwindet das zweite Integral, da der Integrand holomorph innerhalb des geschlossenen Wegs γ_{z_0} ist. Nun benutzen wir:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{a-b}{c-b}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{a-b}{c-b}\right)^N}{1 - \frac{a-b}{c-b}} = \frac{c-b}{c-a} - \frac{(a-b)^N}{(c-b)^{N-1}(c-a)} \tag{118}$$

Theorem von Bürmann III

und setzen $c = \psi(\zeta)$, $b = \psi(z_0)$ und $a = \psi(\tau)$ zusammen mit $h_{z_0}(\zeta)$ aus Gleichung (111) in die Identität (118) ein:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\psi(\zeta)-\psi(\tau)} &= \frac{1}{\psi(\zeta)-\psi(z_0)}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\psi(\tau)-\psi(z_0)}{\psi(\zeta)-\psi(z_0)}\right)^n + \frac{[\psi(\tau)-\psi(z_0)]^N}{[\psi(\zeta)-\psi(z_0)]^N[\psi(\zeta)-\psi(\tau)]} \\
&\overset{(111)}{=} \sum_{n=0}^{N-1}[\psi(\tau)-\psi(z_0)]^n\left(\frac{h_{z_0}(\zeta)}{\zeta-z_0}\right)^{n+1} + \frac{[\psi(\tau)-\psi(z_0)]^N}{\psi(\zeta)-\psi(\tau)}\left(\frac{h_{z_0}(\zeta)}{\zeta-z_0}\right)^{N-1}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung setzen wir in Gleichung (117) ein und gelangen so zu der Darstellung:

$$\begin{aligned}
f(z)-f(z_0) &= \int_{\hat{\gamma}_{z_0 z}} d\tau \frac{1}{\imath 2\pi}\int_{\gamma_{z_0}} d\zeta f^{(1)}(\zeta)\psi^{(1)}(\tau)\sum_{n=0}^{N-1}[\psi(\tau)-\psi(z_0)]^n\left(\frac{h_{z_0}(\zeta)}{\zeta-z_0}\right)^{n+1} + \mathcal{E}_N(z,z_0) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\int_{\hat{\gamma}_{z_0 z}} d\tau \underbrace{\psi^{(1)}(\tau)[\psi(\tau)-\psi(z_0)]^n}_{=\frac{1}{n+1}d(\psi(\tau)-\psi(z_0))^{n+1}/d\tau} \underbrace{\frac{1}{\imath 2\pi}\int_{\gamma_{z_0}} d\zeta \frac{f^{(1)}(\zeta)h_{z_0}(\zeta)^{n+1}}{(\zeta-z_0)^{n+1}}}_{=\frac{1}{n!}d^n\,[f^{(1)}(\zeta)h_{z_0}(\zeta)^{n+1}]/d\zeta^n\big|_{\zeta=z_0}} + \mathcal{E}_N(z,z_0) \\
&= \sum_{n=0}^{N}\frac{[\psi(\tau)-\psi(z_0)]^{n+1}}{(n+1)!}\bigg|_{z_0}^{z}\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n f^{(1)}(\zeta)h_{z_0}(\zeta)^{n+1}\bigg|_{\zeta=z_0} + \mathcal{E}_N(z,z_0) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{[\psi(z)-\psi(z_0)]^n}{n!}\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{n-1} f^{(1)}(\zeta)h_{z_0}(\zeta)^n\bigg|_{\zeta=z_0} + \mathcal{E}_N(z,z_0)
\end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung (108) gezeigt.

Es ist zu bemerken, dass wir hier nicht auf Konvergenzeigenschaften eingegangen sind. Für $\psi(z) = z$ folgt $h_{\zeta_0}(z) \equiv 1$ und man erhält die Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(z)$.

Beispiel zum Theorem von Bürmann I

Beispiel ($f(z) = z^2$ und $\psi(z) = \sin(z)$ um $z_0 = 0$)

$$z^2 = \sum_n \alpha_n \sin^n z \tag{119}$$

Wir beachten, dass gilt $\psi(z) = \sin z = \sin \tau$, $\forall \tau \in]-\pi/2, \pi/2[$ nur eine Lösung z besitzt desweiteren gilt $\psi^{(1)}(z) = \cos(z) \neq 0, \forall z \in]-\pi/2, \pi/2[$. Somit sind die Voraussetzungen des Bürmann-Theorems erfüllt und wir setzen $\psi(z) = \sin z$ in Gleichung (109) ein:

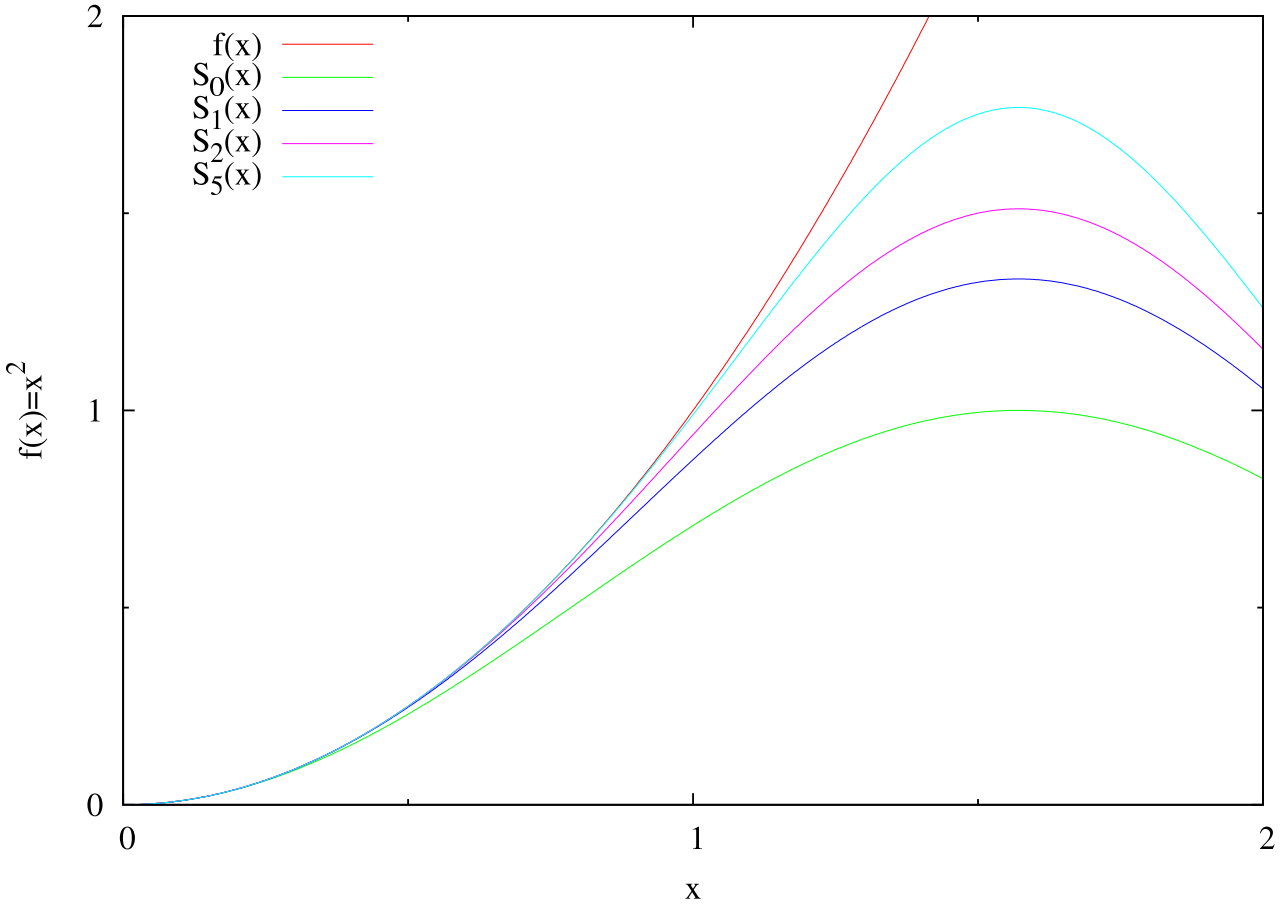
$$\begin{aligned} z^2 &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n z}{n!} \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{n-1} \frac{\zeta^{n+1}}{\sin^n \zeta}\bigg|_{\zeta=0} \\ &= 2\left(\frac{\sin^2 z}{2!} + \frac{(2!!)^2}{4!}\sin^4 z + \frac{(4!!)^2}{6!}\sin^6 z \frac{(6!!)^2}{8!}\sin^8 z + \frac{(8!!)^2}{10!}\sin^{10} z + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}\sin^{2n+2} z + \mathcal{E}_N(z,0) \end{aligned} \tag{120}$$

Da der Koeffizient $2^{2n}(n!)^2/(2n+2)! \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\sin^2(x) < x^2$, $x \in \mathbb{R}$ gilt, konvergiert die Reihe wenigstens für reelle Argumente und wir erhalten:

$$z^2 \overset{z\to 0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2[(2n)!]^2}{(2n+2)!}\sin^{2n+2} z. \tag{121}$$

Beispiel zum Theorem von Bürmann II

Um die Güte der Reihe zu verdeutlichen sind in der folgenden Abbildung die ersten drei Terme aus der asymptotischen Reihe (121) zusammen mit der Funktion $f(x) = x^2$ dargestellt.
Wir sehen, dass diese asymptotische Reihe nur um den gewählten Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ genähert wird. Dies liegt offenbar daran, dass die gewählte Funktion $\psi(z) = \sin(z)$ für große Argumente beschränkt ist, und man somit für Argumente $x \gg 1$ sehr viele Terme in der asymptotischen Reihe benötigt.



Beispiel zum Theorem von Bürmann III

Beispiel ($f(z) = \ln z$ und $\psi(z) = (z - z_0)/(z + z_0)$)

$$\ln z = \sum_n \alpha_n \left(\frac{z - z_0}{z + z_0}\right)^n, \qquad z_0 \neq 0$$

Es gilt:

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{z} \qquad \wedge \qquad \psi(z) = \frac{z - z_0}{z + z_0} \qquad \wedge \qquad \psi(z_0) = 0 \qquad \wedge \qquad \psi^{(1)}(z) = \frac{2z_0}{(z + z_0)^2} \neq 0$$

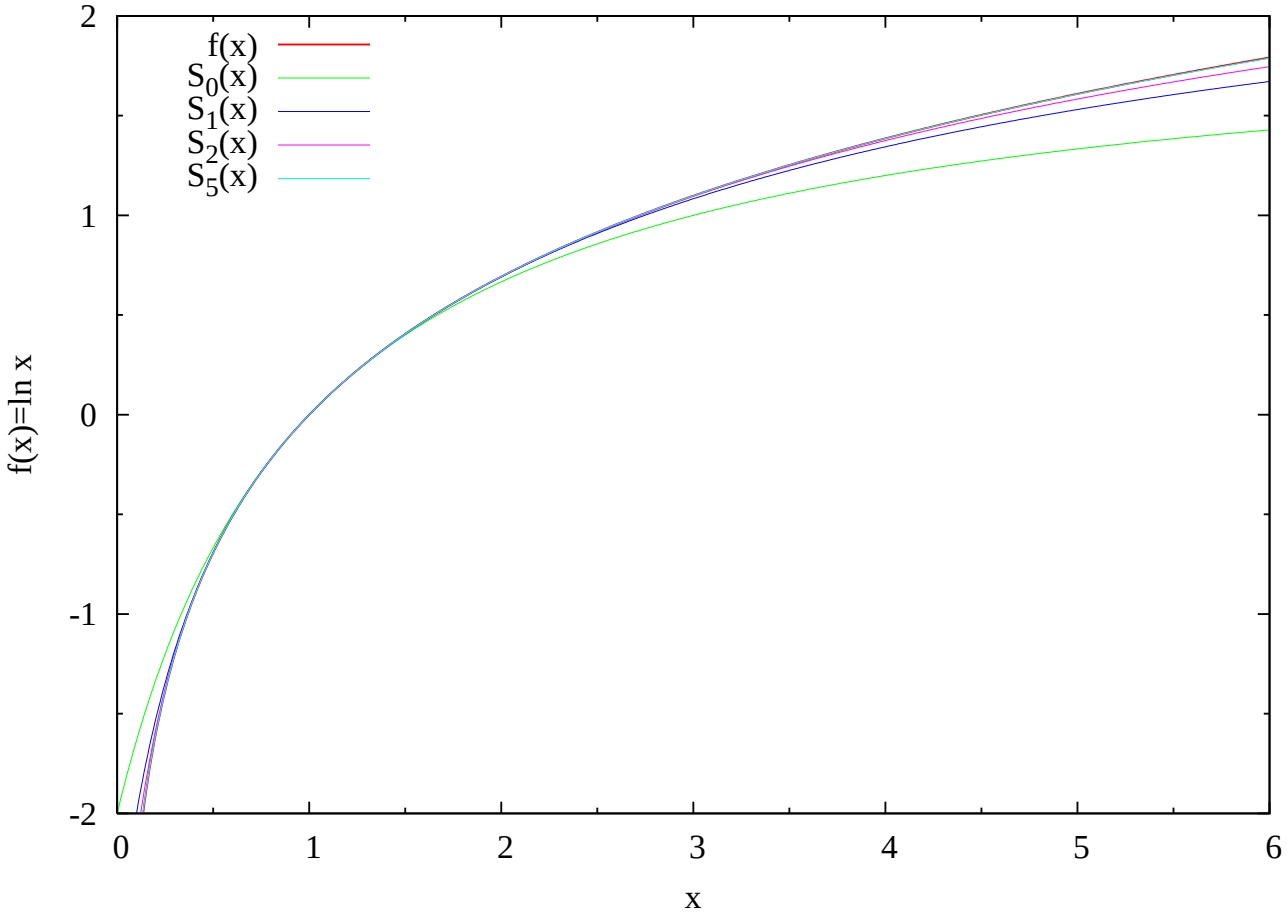
Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\ln z &= \ln z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z - z_0}{z + z_0}\right)^n \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{n-1} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\zeta - z_0}{\psi(\zeta)}\right)^n \Bigg|_{\zeta = z_0} \\
&= \ln z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z - z_0}{z + z_0}\right)^n \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{n-1} \frac{1}{\zeta} (\zeta + z_0)^n \Bigg|_{\zeta = z_0} \\
&= \ln z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z - z_0}{z + z_0}\right)^n \left(z_0^n \frac{(-)^{n-1}(n-1)!}{\zeta^n} + (n-1)!\right)_{\zeta = z_0} \\
&= \ln z_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1} \left(\frac{z - z_0}{z + z_0}\right)^{2m+1} && (122) \\
&= \ln z_0 + 2\frac{z - z_0}{z + z_0} + \frac{2}{3}\left(\frac{z - z_0}{z + z_0}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{z - z_0}{z + z_0}\right)^5 + \frac{2}{7}\left(\frac{z - z_0}{z + z_0}\right)^7 + \cdots && (123)
\end{aligned}$$

Diese Reihe ist konvergent für $z_0 > 0$ und $\Re z \geq -z_0 \neq z$.

Beispiel zum Theorem von Bürmann IV

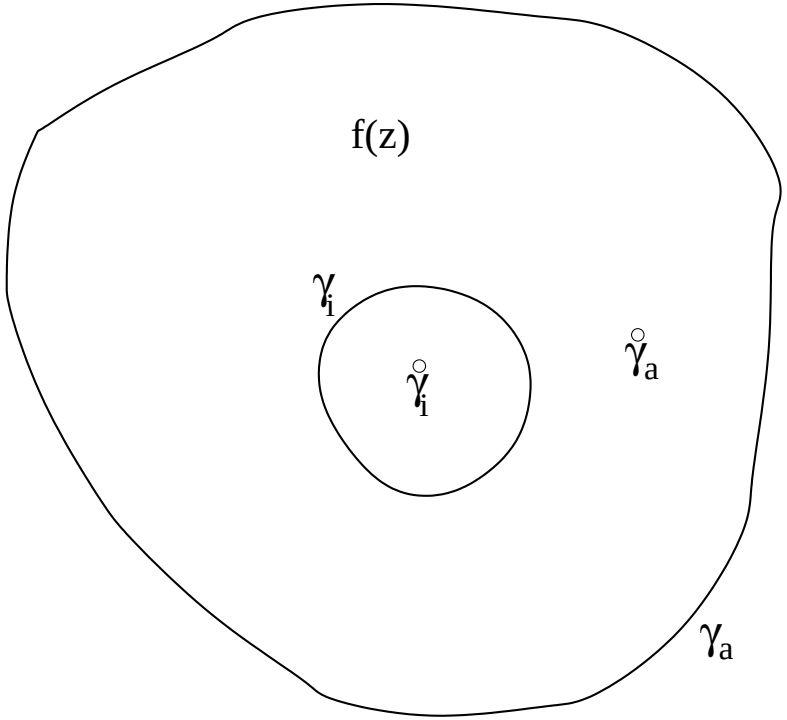
Die folgende Abbildung zeigt wiederum die Güte verschiedener Approximationen.



Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ und das asymptotische Verhalten $x \to x_0 = 1$ der ersten Glieder der dazugehörigen Reihe aus Gleichung (122). In diesem Fall ist die Güte der Approximation deutlich besser als im Fall zuvor.

Theorem von Teixeira I

Das Theorem von Bürmann wollen wir noch im Sinne einer Laurentreihe erweitern. Dazu müssen wir weitere Voraussetzungen an das Integrationsgebiet stellen. Wie verfahren dazu ähnlich wie bei der Laurentreihe indem wir holomorphe Funktionen auf einen kreisringförmigen Gebiet betrachten. Die Situation ist in der Abbildung skizziert.



Das Gebiet $\overset{\circ}{\gamma}_a$ wird definiert durch einen äußeren geschlossenen Weg γ_a, entsprechend das Gebiet $\overset{\circ}{\gamma}_i$ und der innere Weg γ_i. Die Gebiete $\overset{\circ}{\gamma}_{i,a}$ bestehen nur aus inneren Punkten. Auf dem Gebiet $\mathbb{G} = \overset{\circ}{\gamma}_a \setminus \overset{\circ}{\gamma}_i$, sei die Funktion $f(z)$ definiert.

Theorem von Teixeira II

Theorem (Teixeira)

Es sei ein offenes Gebiet $\mathbb{G} = \overset{\circ}{\gamma}_a \setminus \overset{\circ}{\gamma}_i$ *gegeben, welches durch einen äußeren Integrationsweg* γ_a *und einen inneren Integrationsweg* γ_i *(siehe Abbildung) eingeschlossen sei. Auf dem Gebiet* $\mathbb{G}$ *sei eine holomorphe Funktion* $f(z)$ *gegeben. Desweiteren sei eine in* $\overset{\circ}{\gamma}_a \cup \gamma_a$ *holomorphe Funktion* $\psi(\zeta)$ *gegeben, für die zusätzlich für jedes* $\zeta \in \mathbb{G}$ *gilt:*

$$|\psi(z_i)| < |\psi(\zeta)| < |\psi(z_a)|, \qquad \forall z_i \in \gamma_i,\ z_a \in \gamma_a, \tag{124}$$

wobei es nur eine einfache Nullstelle $z_0 =\in \overset{\circ}{\gamma}_a$ *mit* $\psi(z_0) = 0$ *gebe. Dann hat die Gleichung* $\psi(\zeta) = \psi(z) \doteq \psi_0$ *nur eine einfache Lösung* $\zeta \in \overset{\circ}{\gamma}_a$*, und es gilt die asymptotische Entwicklung:*

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi(z)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{1}{\psi^n(z)} \tag{125}$$

mit den Koeffizienten:

$$\alpha_n = \frac{1}{\imath 2\pi n} \int_{\gamma_a} d\zeta\ \frac{f^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta)^n} \tag{126}$$

$$\beta_n = \frac{-1}{\imath 2\pi n} \int_{\gamma_i} d\zeta\ f^{(1)}(\zeta)\psi(\zeta)^n \tag{127}$$

Theorem von Teixeira III

Beweis:

Im Folgenden betrachten wir nur Randzyklen $\gamma = \partial U \subset \mathbb{C}$ und nehmen immer an, dass $z \in \overset{\circ}{\gamma}$. Wir benötigen den aus der Funktionentheorie bekannten Zusammenhang zwischen Anzahl der Nullstelln und Polstellen einer meromorphen Funktion:

$$\frac{1}{\imath 2\pi} \int_\gamma d\zeta \frac{g^{(1)}(\zeta)}{g(\zeta) - w} = N_w - N_\infty \tag{128}$$

dabei bezeichnet N_w die Anzahl der w-Stellen von g und N_∞ die Anzahl der Polstellen von f in $\overset{\circ}{\gamma}$. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall einer holomorphen Funktion und einfachen Nullstelle $z_i \in \overset{\circ}{\gamma}$, so dass gilt:

$$g(\zeta) = (\zeta - z_i)\Delta_g(\zeta), \qquad \Delta_g(z_i) = g^{(1)}(z_i) \tag{129}$$

Desweiteren sei zusätzlich eine weitere auf $\overset{\circ}{\gamma}$ holomorphe Funktion $h(\zeta)$ gegeben, dann gilt:

$$\frac{1}{\imath 2\pi} \int_\gamma d\zeta h(\zeta) \frac{g^{(1)}(\zeta)}{g(\zeta)} = \sum_{z_i \in \overset{\circ}{\gamma}} \mathrm{res}_{z_i}\ h(\zeta) \frac{g^{(1)}(\zeta)}{g(\zeta)} = \sum_{z_i \in \overset{\circ}{\gamma}} \mathrm{res}_{z_i}\ h(\zeta) \frac{g^{(1)}(\zeta)}{(\zeta - z_i)\Delta_g(\zeta)} = \sum_{z_i \in \overset{\circ}{\gamma}} h(z_i) \tag{130}$$

Wählen wir $h(\zeta) = 1$ und nehmen an, dass wir nur eine Nullstelle z_0 haben, so folgt:

$$\frac{1}{\imath 2\pi} \int_\gamma d\zeta h(\zeta) \frac{g^{(1)}(\zeta)}{g(\zeta)} = h(z_0) \tag{131}$$

Für den Spezialfall $h(z) = 1$ folgt, dass für eine holomorphe Funktion $g(\zeta)$ mit einer einfachen Nullstelle gilt $N_0 = 1$. Nun gehen wir über zu Funktionen ψ mit Nullstellen höherer Vielfachheit.

Theorem von Teixeira IV

Betrachten wir zunächst die Gleichung $\psi(\zeta) = \psi(z) \equiv \psi_0$. Die Funktion $\psi(\zeta)$ hat nach Voraussetzungen keine Pole, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $\Delta_\psi(\zeta)$, so dass gilt:

$$\psi(\zeta) = \psi(z) + (\zeta - z)^n \Delta_\psi(\zeta) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi_0} = \frac{n}{\zeta - z} + \frac{\Delta_\psi^{(1)}(\zeta)}{\Delta_\psi(\zeta)} \tag{132}$$

Dabei ist $\Delta_\psi(z) \neq 0$. Ist $n = 1$, so gilt $\Delta_\psi(z) = \psi^{(1)}(z)$, wie im Theorem von Bürmann. Deswegen gilt für eine beliebige holomorphe Funktion $h(\zeta)$:

$$\frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_a} d\zeta h(\zeta) \frac{\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi_0} \overset{(132)}{=} \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_a} d\zeta h(\zeta) \left(\frac{n}{\zeta - z} + \frac{\Delta_\psi^{(1)}(\zeta)}{\Delta_\psi(\zeta)} \right) \overset{(131)}{=} nh(z) \tag{133}$$

Dabei wurde verwendet, dass $\Delta_\psi \neq 0$ und $\Delta_\psi^{(1)}$ holomorph ist. Setzen wir speziell zunächst $h(\zeta) = 1$, so folgt:

$$n = \frac{1}{\imath 2\pi} \int\limits_{\gamma_a} d\zeta \frac{\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi(z)} \overset{(124)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(z)^n}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_a} d\zeta \frac{\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta)^{n+1}} = \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_a} d\zeta \frac{\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta)} \overset{(128)}{=} 1 \tag{134}$$

Der letzte Schritt folgt, da $\psi(z)$ innerhalb von $\overset{\circ}{\gamma}_a$ holomorph ist und eine *einfache* Nullstelle in $z_0 \in \mathbb{G}$ besitzt. Mit Hilfe von (133) folgt dann die Anzahl der Nullstellen von $\psi(\zeta)$ ist gleich der Anzahl der $\psi(z)$-Stellen innerhalb von $\overset{\circ}{\gamma}_a$. Das bedeutet nun für die Funktion $f(z)$ unter Verwendung von (133) und (134) indem wir $h = f$ setzen:

$$f(z) = \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\partial\mathbb{G}} d\zeta \frac{f(\zeta)\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi(z)} = \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_a} d\zeta \frac{f(\zeta)\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi(z)} - \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_i} d\zeta \frac{f(\zeta)\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta) - \psi(z)} \tag{135}$$

Theorem von Teixeira V

Nun verwenden wir die Eigenschaft (124):

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{\imath 2\pi}\int_{\gamma_a} d\zeta \frac{f(\zeta)\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta)[1-\psi(z)/\psi(\zeta)]} + \frac{1}{\imath 2\pi}\int_{\gamma_i} d\zeta \frac{f(\zeta)\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(z)[1-\psi(\zeta)/\psi(z)]} \\
&= f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(z)^n}{\imath 2\pi}\int_{\gamma_a} d\zeta\; f(\zeta)\frac{\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\psi(z)^{n+1}}\frac{1}{\imath 2\pi}\int_{\gamma_i} d\zeta\; f(\zeta)\psi^{(1)}(\zeta)\psi(\zeta)^n \\
&= f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(z)^n}{\imath 2\pi}\frac{-1}{n}\int_{\gamma_a} d\zeta\; f(\zeta)\frac{d\psi(\zeta)^{-n}}{d\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\psi(z)^{n+1}}\frac{1}{\imath 2\pi}\frac{1}{n+1}\int_{\gamma_i} d\zeta\; f(\zeta)\frac{d\psi(\zeta)^{n+1}}{d\zeta} \\
&= f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(z)^n}{\imath 2\pi n}\int_{\gamma_a} d\zeta\frac{f^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta)^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(z)^n}\frac{1}{\imath 2\pi n}\int_{\gamma_i} d\zeta f^{(1)}(\zeta)\psi(\zeta)^n
\end{aligned}
$$

Dies ist die gesuchte Darstellung.
Wenn wir die Abbildung $\psi(\zeta) \to (\zeta - z)/(\psi(\zeta) - \psi(z))$ betrachten, erhalten wir für die Koeffizienten α_n formal das Ergebnis aus dem Bürmann-Theorem. Setzen wir $\psi(\zeta) \to (\zeta - z)$ dann gewinnen wir die Laurentreihe.

Beispiele zum Theorem von Teixeira I

Beispiel ($f(z) = z^2$)

$$\psi(z) = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad z_0 = 0 \tag{136}$$

Betrachten wir das asymptotische Verhalten $z \to 0$ der holomorphen Funktion $f(z) = z$ und entwickeln diese nach der Funktion ψ. Die Nullstelle von $\psi(z)$ sitzt im Ursprung $z_0 = 0$ und ist offenbar einfach. Wir wählen für γ_i einen Kreis um den Ursprung mit einem beliebig klein wählbaren Radius ϵ und bezeichnen diesen mit κ_0^ϵ und für γ_a einen Kreis mit Radius $r > \epsilon$, den wir mit κ_0^r bezeichnen. Die Abbildung zeigt $|\psi(z)|$ im Bereich $|z| < 1$. Offenbar kann für jedes $z \in \mathbb{G}$ ein ϵ gefunden werden, so dass gilt:

$$|\psi(z_i)|_{z_i \in \kappa_0^\epsilon} < |\psi(z)|$$

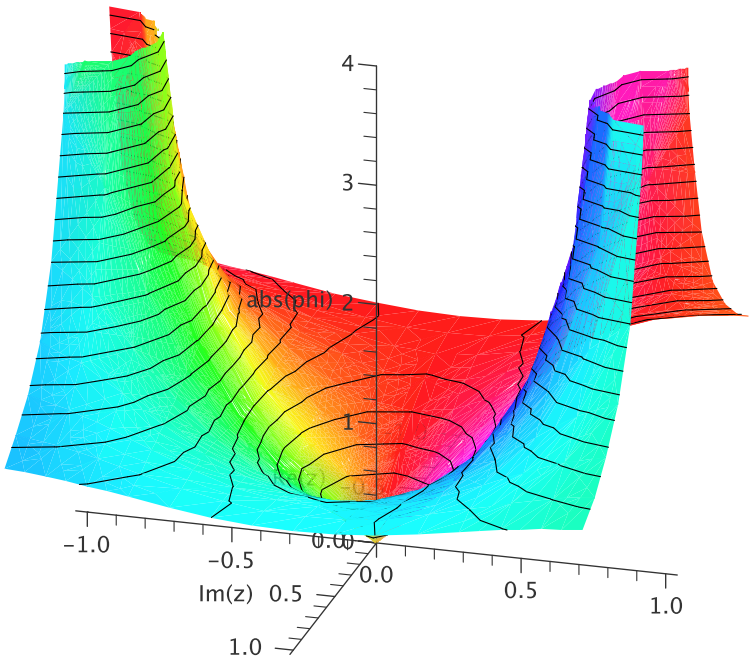
Die beiden Pole sitzen bei $\pm\imath$. Für einen hinreichend kleinen Radius r gilt für κ_0^ϵ:

$$|\psi(z)| < |\psi(z_a)|_{z_a \in \kappa_0^r}$$

Das bedeutet nach Teixeira, dass die Gleichung

$$\psi(\zeta) = \psi(z) = \psi_0, \; z \in \mathring{\gamma}_a = \mathring{\kappa}_0^r$$

nur eine Lösung hat.



Beispiele zum Theorem von Teixeira II

Insgesamt lassen sich damit die Koeffizienten α_n berechnen:

$$\alpha_n = \frac{1}{\imath 2\pi n} \int\limits_{\kappa_0^{1-\epsilon}} d\zeta \frac{\partial_\zeta \zeta^2}{(2\zeta/(1+\zeta^2))^n} \overset{n\geq 2}{=} \frac{2^{1-n}}{n(n-2)!} \partial_\zeta^{n-2}(1+\zeta^2)^n\Big|_{\zeta=0} = \frac{2^{1-n}}{n(n-2)!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \underbrace{\partial_\zeta^{n-2}\zeta^{2m}\Big|_{\zeta=0}}_{(n-2)!\delta_{2m,n-2}}$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha_n = \begin{cases} \dfrac{2^{1-n}}{n}\dbinom{n}{n/2-1} & : n = 2, 4, 6, \ldots \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

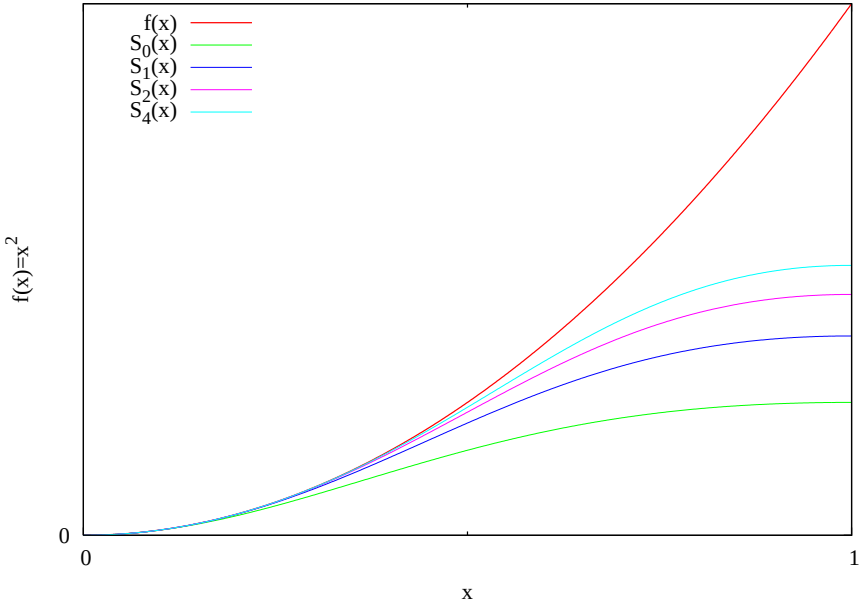
Für die Koeffizienten β_n erhält man analog:

$$\beta_n = \frac{-2}{\imath 2\pi n} \int_{\kappa_0^{\epsilon}} d\zeta \frac{\zeta(2\zeta)^n}{(1+\zeta^2)^n} = 0$$

Zusammengefasst erhalten wir die Darstellung:

$$z^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^{1-2l}(2l-1)!}{(l-1)!(l+1)!} \left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^{2l} \qquad (137)$$

In der Abbildung sind die ersten Terme der asymptotischen Entwicklung mit der Funktion $f(x) = x^2$ verglichen. Zudem erkennt man, dass die Reihenentwicklung konvergent ist für $|z| < 1$.

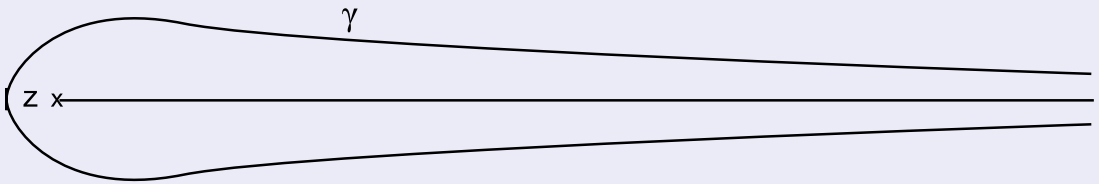


Differintegration I

Definition (Differintegration)

Für eine in $\zeta = z$ analytische Funktion $f(z)$ ohne Verzeigungsschnitte ist die **Differintegration** der komplexen Ordnung ν nach einer analytischen Funktion $\psi(\zeta)$ definiert durch:

$$\frac{d^\nu f(z)}{d\psi(z)^\nu} \doteq \frac{\Gamma(\nu+1)}{\imath 2\pi} \int_\gamma d\zeta \, \frac{f(\zeta)\psi^{(1)}(\zeta)}{[\psi(\zeta)-\psi(z)]^{\nu+1}} \tag{138}$$



Dies können wir auch mit Hilfe der partiellen Integration umschreiben in:

$$\frac{d^\nu f(z)}{d\psi(z)^\nu} \doteq \frac{\Gamma(\nu)}{\imath 2\pi} \int_\gamma d\zeta \, f^{(1)}(\zeta) \frac{d}{d\zeta} \frac{1}{[\psi(\zeta)-\psi(z)]^\nu}$$

Für $\nu = n$ und $\psi(\zeta) = \zeta$ folgt die bekannte Formel:

$$\frac{d^n f(z)}{dz^\nu} \doteq \frac{n!}{\imath 2\pi} \int_\gamma d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\nu+1}}$$

Lagrange Theorem I

Theorem (Lagrange)

Es seien innerhalb und auf dem Weg γ_a holomorphe Funktionen $f(z)$ und $h(z)$ gegeben und es sei

$$|\lambda h(z_a)| < |z_a - z_0|, \qquad \forall z_a \in \gamma_a, \quad \forall z_0 \in \overset{\circ}{\gamma}_a, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{139}$$

dann hat für ein festes z_0 die Gleichung

$$\zeta = z_0 + \lambda h(\zeta), \tag{140}$$

eine Lösung $\zeta \in \overset{\circ}{\gamma}_a$ und jede in $\overset{\circ}{\gamma}_a$ holomorphe Funktion $f(z)$ kann in eine Potenzreihe in λ entwickelt werden und es gilt:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left[f^{(1)}(\zeta) h(\zeta)^n \right] \Big|_{\zeta = z_0} \tag{141}$$

Beweis:
Der Beweis folgt mit Hilfe des Theorems von Teixeira, wenn wir die holomorphe Funktion $\psi(\zeta)$ schreiben als:

$$\psi(\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{h(\zeta)}, \qquad z_0 \in \overset{\circ}{\gamma}_a, \quad \zeta \in \overset{\circ}{\gamma}_a \cup \gamma. \tag{142}$$

Lagrange Theorem II

Dann gilt zum einen, dass z_0 eine einfache Nullstelle von $\psi(\zeta)$ ist und dass die Gleichung (140) geschrieben werden kann als:

$$\lambda = \psi(\zeta) \qquad \Longrightarrow \qquad |\psi(\zeta)| = |\lambda| \overset{(139)}{<} \left| \frac{z_a - z_0}{h(z_a)} \right| = |\psi(z_a)|.$$

Damit ist die Voraussetzung des Teixeira-Theorems erfüllt, da zusätzlich noch angenommen wurde, dass $f(z)$ in $\mathbb{G} = \overset{\circ}{\gamma}_a \cup \gamma_a$ holomorph ist verschwinden alle Koeffizienten: $\beta_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$. Desweiteren hat die Gleichung (140) nur eine Lösung. Für die Koeffizienten α_n folgt:

$$\alpha_n = \frac{1}{\imath 2\pi n} \int_{\gamma_a} d\zeta\ \frac{f^{(1)}(\zeta) h(\zeta)^n}{(\zeta - z_0)^n} = \frac{1}{n} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\ f^{(1)}(\zeta) h(\zeta)^n \Big|_{\zeta = z_0}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Für der Fall α_0 müssen wir im Beweis zum Teixeira-Theorem von der folgenden Gleichung starten:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_a} d\zeta\ f(\zeta) \frac{\psi^{(1)}(\zeta)}{\psi(\zeta)} = \frac{1}{\imath 2\pi} \int_{\gamma_a} d\zeta\ f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{h^{(1)}(\zeta)}{h(\zeta)} \right) = f(z_0)$$

Damit folgt insgesamt aus (125) mit $\psi(z) = \lambda$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\ f^{(1)}(\zeta) h(\zeta)^n \Big|_{\zeta = z_0}$$

Beispiele zum Lagrange Theorem I

Beispiel ($z - z_0 - \lambda z^{-1} = 0$)

Sei $|z(z - z_0)| < |\lambda|$ und $|\lambda| < |z_0|/2$, gesucht ist die Lösung der Gleichung:

$$z - z_0 - \frac{\lambda}{z} = 0$$

Aus dem LAGRANGE-Theorem (141) folgt mit $f(z) = z$ und $h(z) = 1/z$:

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \frac{(-)^{n-1}}{z_0^{2n-1}} = z_0 \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4\lambda)^n}{z_0^{2n}} \binom{1/2}{n}\right) = \frac{z_0}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\lambda/z_0^2}\right)$$

Dies ist eine der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung.

Beispiel ($z = 1 + \lambda z^{\alpha}$)

$$z = 1 + \lambda z^{\alpha}, \qquad \alpha > 0, \quad (\lambda \to 0) \tag{143}$$

Dann gilt asymptotisch:

$$z = 1 + \lambda + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \prod_{l=0}^{n-2} (\alpha n - l) \tag{144}$$

$$\ln(z) = \lambda + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \prod_{l=1}^{n-1} (\alpha n - l) \tag{145}$$

Beispiele zum Lagrange Theorem II

Gesucht ist das asymptotische Verhalten für $\lambda \to 0$. Wir setzen demnach $h(z) = z^\alpha$ und verwenden Gleichung (141) für zwei verschiedene Funktionen $f(z) = z, \ln(z)$:

1. $f(z) = z$ und $|z| < 1/\alpha$:

$$z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \zeta^{\alpha n} \bigg|_{\zeta=1} = 1 + \lambda + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \prod_{l=0}^{n-2} (\alpha n - l) = 1 + \lambda + \alpha\lambda^2 + \ldots$$

Für den Spezialfall $\alpha = 2$ folgt:

$$z = 1 + \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{(2n)!}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{2\lambda} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-4\lambda)^n \binom{1/2}{n} \right) = \frac{1}{2\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - 4\lambda} \right)$$

2. $f(z) = \ln(z)$ für $|\lambda| < |(\alpha - 1)^{\alpha-1} \alpha^{-\alpha}|$:

$$\ln(z) = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} [\zeta^{\alpha n - 1}] \bigg|_{\zeta=1} = \lambda + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \prod_{l=1}^{n-1} (\alpha n - l) = \lambda + \lambda^2 \frac{2\alpha - 1}{2} + \ldots$$

Folgerung aus dem Lagrange Theorem I

Als unmittelbare Folgerung aus dem allgemeinen LAGRANGE-Theorem ergibt sich:

Lemma

Es sei eine in einer Umgebung $\mathbb{U}$ um $z = z_0 = 0$ holomorphe Funktion $h(z)$ gegeben, für die gilt: $h(0) \neq 0$, dann existieren reelle Zahlen α, β so dass für $|\lambda| < \alpha$ und $|z| < \beta$ die Gleichung:

$$\zeta = \lambda h(\zeta) \tag{146}$$

eine Lösung $z = \zeta$ besitzt, für die gilt:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} h(\zeta)^n \right|_{\zeta=0} \tag{147}$$

Beweis:
Dies folgt aus dem allgemeinen LAGRANGE Theorem wenn man dort $z_0 = 0$ und $f(z) = z$ setzt. Wir betrachten einen um den Ursprung geschlossenen Weg γ_a, der ganz in $\mathbb{U}$ liegt. Aus der Gleichung (139) folgt:

$$|\lambda| < \left| \frac{z_a}{h(z_a)} \right| \leq \max_{z_a \in \gamma_a} \left| \frac{z_a}{h(z_a)} \right| \doteq \alpha \tag{148}$$

Die Konstante β wählen wir etwa als den maximalen Abstand des Weges γ_a vom Ursprung.

Beispiel zum Lagrange Theorem I

Beispiel (*Lambert-W*-Funktion)

$$ze^z = \lambda \tag{149}$$

- Betrachten wir zunächst $\lambda \to 0$, dann folgt mit $h(z) = e^{-z}$ die asymptotische Lösung:

$$z = W(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} e^{-n\zeta}\Big|_{\zeta=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{(-n)^{n-1}}{n!} = \lambda - \lambda^2 + \frac{3\lambda^3}{2} - \frac{8\lambda^4}{3} + \ldots \tag{150}$$

  Die Funktion $W(\lambda)$ ist als die Lambertsche-W-Funktion bekannt. Der Konvergenzradius ist $|\lambda| < 1$.

- Nun betrachten wir:

$$ze^z = t \tag{151}$$

  und suchen das asymptotische Verhalten für $t \to \infty$. Dann sind die Voraussetzungen zunächst nicht erfüllt und wir müssen die Gleichung zunächst umschreiben, indem wir sie logarithmieren und umschreiben:

$$z = \ln t - \ln z. \tag{152}$$

  Nun können wir das allgemeine Lagrange Theorem benutzen mit:

$$z_0 = \ln t \qquad \wedge \qquad \lambda = -1$$

  dann folgt:

$$z = \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} (\ln \zeta)^n\Big|_{\zeta=z_0} = \ln t - \ln\ln t + \frac{\ln\ln t}{\ln t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)^2 - \ldots \tag{153}$$

Asymptotisches Newtonverfahren I

Newtonverfahren

Für eine gegebene Funktion $f(\xi)$, die an der Stelle $\xi = z$ eine Nullstelle besitzt für die gilt $f^{(1)}(z) \neq 0$, konvergiert das Iterationsverfahren:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{(1)}(z_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{154}$$

unter bestimmten Voraussetzungen an die Funktion $f(\xi)$ gegen eine Nullstelle von $f(\xi)$.

Die genauen Voraussetzungen sind länglich und involvieren im Wesentlichen Beschränktheits-Eigenschaften der ersten Ableitung $f^{(1)}$. Insbesondere geht die Größe der Ableitung an der Nullstelle z ein. Letztere ist aber gesucht. In der Praxis treten deswegen verschiedene Fälle auf:

- Die Folge divergiert
- Die Folge konvergiert, aber nicht zu der gewünschten Lösung
- Die Folge oszilliert
- Die Folge konvergiert gegen eine vermutete Lösung, aber es ist nicht möglich dies zu beweisen.

In vielen Fällen ist es wichtig gute Startwerte z_0 zu besitzen. In Abhängigkeit der Güte der Startwerte kann das Verfahren konvergieren oder nicht.

Beispiele zum Newtonverfahren I

Beispiel (*Lambert-W*-Funktion $W(z)$)

$$ze^z = \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad W(\lambda)e^{W(\lambda)} = \lambda \in \mathbb{C} \tag{155}$$

1. Für kleine λ ist die Lösung z_0 von:

$$ze^z = \lambda, \qquad |\lambda| < 1$$

gesucht. Dies ist äquivalent damit, die Nullstelle von $f(z) \doteq ze^z - \lambda$ zu finden. Dann gilt für das Iterationsverfahren:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n - \lambda e^{-z_n}}{1 + z_n} = \frac{z_n^2 + \lambda e^{-z_n}}{1 + z_n}$$

Für kleine λ scheint $z_0 = \lambda$ eine vernünftige Wahl zu sein. Damit folgt für die Iterierten:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \lambda - \lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4) \\
z_2 &= z_1 - \frac{8}{3}\lambda^4 + \frac{125}{24}\lambda^5 - \frac{54}{5}\lambda^6 + \frac{16807}{720}\lambda^7 - \mathcal{O}(\lambda^8) \\
z_3 &= z_2 - \frac{16384}{315}\lambda^8 + \frac{531441}{4480}\lambda^9 + \frac{531441}{4480}\lambda^9 - \frac{156250}{567}\lambda^{10} + \frac{2357947691}{3628800}\lambda^{11} + \mathcal{O}(\lambda^{12})
\end{aligned}$$

Dies stimmt mit der Entwicklung (150) in den jeweiligen Ordnungen überein. Im Übrigen erhält man in jeder Iterationsstufe 4 weitere Glieder.

Beispiele zum Newtonverfahren II

2. Für große λ ist die Lösung z_0 von:

$$ze^z = \lambda, \qquad |\lambda| \gg 1 \qquad \Longrightarrow \qquad z_{n+1} = \frac{z_n^2 + \lambda e^{-z_n}}{1 + z_n}$$

Nun ist λ groß und wir verwenden als Beispiel zwei verschiedene Startwerte:

$z_0 = \lambda$:

$$z_0 = \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} z_1 &= \lambda - 1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \\ z_2 &= \lambda - 2 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \\ z_3 &= \lambda - 3 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \end{aligned}$$

Man erhält also keine konvergente Folge!

$z_0 = \ln \lambda$:

$$z_n = \ln \lambda - n + O(1) = z_0 - n + \mathcal{O}(1)$$

Auch hier erhält man keine konvergente Folge. Verbessern wir den Startwert weiter.

$z_0 = \ln \lambda - \ln \ln \lambda$:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 + \frac{\ln \ln \lambda}{\ln \lambda} + \dots \\ z_2 &= z_0 + \frac{\ln \ln \lambda}{\ln \lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln \ln \lambda}{\ln \lambda}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Die nächste Iteration stimmt offenbar überein mit der exakten Form.

Beispiele zum Newtonverfahren III

3. Betrachten wir das Beispiel weiter schreiben aber die Gleichung erst einmal um und logarithmieren:

$$z + \ln z = \ln \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad z_{n+1} = \frac{z_n}{1 + z_n}(1 - \ln z_n + \ln \lambda)$$

Beginnen wir für große λ mit dem Startwert $z_0 = \ln \lambda$, so folgt:

$$\begin{aligned} z_1 &= \ln \lambda - \ln \ln \lambda \\ z_2 &= z_0 + \frac{\ln \ln \lambda}{\ln \lambda} + \ldots \\ z_3 &= z_0 + \frac{\ln \ln \lambda}{\ln \lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln \ln \lambda}{\ln \lambda}\right)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Man sieht in diesem Fall reicht der Startwert $\ln \lambda$ aus um die nächsten Terme in der asymptotischen Reihe zu erzeugen, auch hier sind die aufgeführten Iterationen übereinstimmend mit der Lagrangereihe.

Beispiele zum Newtonverfahren IV

Beispiel (Nullstellen eines Polynoms $p(x)$)

$$p(x) \doteq x^4 - x^2 - 2xe^{-\kappa}\cosh\gamma - e^{-2\kappa}, \qquad \kappa, \gamma \geq 0 \tag{156}$$

Gesucht ist das asymptotische Verhalten der größten positiven Nullstelle $x_0 = x_0(\kappa, \gamma) > 0$ des Polynoms p ($p(x_0) = 0$). Aufgrund der DESCARTSchen-Vorzeichenregel wissen wir, dass es höchstens eine solche Nullstelle gibt. Man kann zeigen, dass es genau eine gibt. Hier wollen wir jedoch das NEWTON-Verfahren anwenden und diese Nullstelle für verschiedene Grenzfälle der Parameter κ, γ konstruieren.

$\kappa = \gamma \ll 1$: In diesem Fall lautet die zu lösende Gleichung:

$$0 = p(x_0) = x_0^4 - x_0^2 - (1 + e^{-2\kappa})x_0 - e^{-2\kappa}.$$

Für $\kappa = 0$ lautet die zu lösende Gleichung: $0 = (x_0^0)^2 - x_0^0 - 1$. Für das Newtonverfahren verwenden wir diesen Punkt für $\kappa > 0$ als Startwert und erhalten im ersten Schritt:

$$x_0 = x_0^0 - \frac{p(x_0^0)}{p'(x_0^0)} = x_0^0 - \frac{(x_0^0 + 1)^2 - (x_0^0)^2 - (1 + e^{-2\kappa})x_0^0 - e^{-2\kappa}}{4(x_0)^3 - 2x_0^0 - 1 - e^{-2\kappa}}$$

Dies entwickeln wir bis zur ersten Ordnung $\mathcal{O}(\kappa)$ und erhalten:

$$x_0 = x_0^0 - \frac{2(x_0^0 + 1)}{4x_0^0 + 1}\kappa + \mathcal{O}(\kappa^2)$$

Eine weitere Iteration und einsetzen der expliziten Lösung x_0^0 ergibt:

$$x_0(\kappa, \kappa) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{\kappa}{\sqrt{5}} + \left(5 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\frac{\kappa^2}{20} + \mathcal{O}(\kappa^3)$$

Beispiele zum Newtonverfahren V

$\kappa = \gamma \gg 1$: Für große Werte des Parameters ist die kleine Größe $e^{-2\kappa}$ um die entwickelt werden muss und deswegen benutzen wir als Startwert die Lösung des Polynoms für $\kappa = \infty$ und bezeichnen diese mit x_0^∞ für die gilt: $0 = (x_0^\infty)^3 - x_0^\infty - 1$. Für das Newtonverfahren ergibt sich damit nach dem ersten Schritt und einer Entwicklung in ϵ:

$$x_0(\kappa, \kappa) = x_0^\infty + \frac{1 + x_0^\infty}{3 + 2x_0^\infty} e^{-2\kappa} + \mathcal{O}(e^{-4\kappa})$$

Weitere Iterationen des NEWTON-Verfahrens ergeben die höheren Ordnungen in $e^{-2\kappa}$.

$\kappa - \gamma \gg 1$: In diesem Fall ist die kleine Größe $e^{-\kappa}$ und $\kappa \gg \gamma$. Deswegen fallen die letzten beiden Terme weg und das zu lösende Polynom lautet $0 = x_0^4 - x_0^2$. Die größte postitive Nullstelle ist demnach $x_0 = 1$ und wird als Startwert des Iterationsverfahrens verwendet. Das Ergebnis der ersten beiden Iterationsschritte lautet:

$$x_0(\kappa, \gamma) = 1 + e^{-\kappa} \cosh \gamma + \frac{e^{-2\kappa}}{2}(1 - 3\cosh^2 \gamma) + \ldots$$

Es ergibt sich systematisch eine asymptotische Reihenentwicklung in Potenzen von $e^{-\kappa}$ und Koeffizienten, die von γ abhängen.

Beispiele zum Newtonverfahren VI

$\gamma - \kappa \gg 1$: In Diesem Fall sehen wir, dass für große γ der dritte Term sehr groß wird und deswegen die größte Nullstelle ebenfalls mit wachsendem γ wächst. In führender Ordnung gilt deswegen:

$$x_0^4 \overset{\gamma \to \infty}{\rightsquigarrow} 2x_0 e^{-\kappa} \cosh \gamma$$

Deswegen setzen wir für das NEWTON-Verfahren als Startwert:

$$x_0 = (2e^{-\kappa} \cosh \gamma)^{1/3}$$

Die ersten beiden Iterationsschritte führen auf:

$$x_0(\kappa, \gamma) = (2e^{-\kappa} \cosh \gamma)^{1/3} + \frac{1}{3(2e^{-\kappa} \cosh \gamma)^{1/3}} + \frac{e^{-\kappa}}{6 \cosh \gamma} + \ldots$$

Wir sehen es handelt sich um eine asymptotische Reihe. Der erste Term divergiert, die folgenden Terme verschwinden im Limes $\gamma \to \infty$.

Asymptotisches Newtonverfahren N-dimensional I

Newtonverfahren in N Dimensionen

Für eine gegebene Funktion f mit Komponenten $f_i(\xi_1, ..., \xi_N)$, $i = 1, ..., N$, die an der Stelle $\xi = z \in \mathbb{R}^N$ eine Nullstelle besitzt für die gilt $\mathbf{J}^{-1}(z)f(z) \neq 0$, konvergiert das Iterationsverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \mathbf{J}^{-1}(x_n)f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, ..., \quad z_n \in \mathbb{R}. \tag{157}$$

mit

$$\mathbf{J}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(\xi)}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial f_N(\xi)}{\partial \xi_N} \end{pmatrix}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N \tag{158}$$

unter bestimmten Voraussetzungen an die Funktion $f(\xi)$ gegen eine Nullstelle z von $f(\xi)$.

Es gelten die selben Bemerkungen wie im eindimensionalen Fall.

Beispiele zum Newtonverfahren I

Beispiel (Zwei Nichtlineare Gleichungen)

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 e^{2\kappa} - (1 + x_1 e^{\kappa+\gamma})(1 + x_2 e^{\kappa-\gamma}) \tag{159}$$

$$f_2(x_1, x_2) = e^{\kappa-\gamma}(x_1 - x_2) \tag{160}$$

Dieses Beispiel ist äquivalent zum Polynom (156) und es gilt:

$$\mathbf{J}(x) = e^{\kappa-\gamma} \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 e^{\kappa+\gamma} - e^{2\gamma}(1 + x_2 e^{\kappa-\gamma}) & 2x_1^2 x_2 e^{\kappa+\gamma} - (1 + x_1 e^{\kappa+\gamma}) \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{161}$$

Betrachten wir als Beispiel den dritten Fall $\kappa \gg \gamma$, dann folgt mit den Startwerten $x_0 = (1, 1)$ zunächst:

$$\mathbf{J}^{-1}(1) = \frac{e^{-\kappa}}{2e^{\kappa} - 2\cosh\gamma} \begin{pmatrix} 1 & e^{\kappa+\gamma} - 1 \\ 1 & -e^{\kappa+\gamma} + e^{2\gamma} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad f(1) = -e^{\kappa} \begin{pmatrix} 2\cosh\gamma + e^{-\kappa} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$x_0 = 1 - \mathbf{J}^{-1}(1) f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(1 + \frac{2\cosh\gamma + e^{-\kappa}}{2e^{\kappa} - 2\cosh\gamma} \right)$$

Unter Beachtung, dass $(x_0)_1 = (x_0)_2$ gilt, ergibt sich in führender Ordnung:

$$(x_0)_1 = (x_0)_2 = 1 + e^{-\kappa}\cosh\gamma + \ldots$$

Dies ist in niedrigster Ordnung identisch mit dem zuvor erhaltenen Ergebnis.

Bernoulli-Polynome und Zahlen I

Die EULER-MACLAURIN-Formel wird bei der numerischen Berechnungen von Summen benötigt. In diesem Theorem treten die BERNOULLI-Zahlen auf, die wir zunächst einführen werden.

Definition (Bernoulli-Polynome und Zahlen)

Die **Bernoulli-Polynome** sind definiert durch die Gleichung:

$$\frac{d}{dx} B_{n+1}(x) = (n+1) B_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{162}$$

und

$$B_0(x) \doteq 1 \qquad \wedge \qquad B_1(x) \doteq x - \frac{1}{2}$$

und den Randbedingungen:

$$B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{163}$$

Die Zahlen $B_n \equiv B_n(0)$ nennt man die **Bernoulli-Zahlen**.

Die ersten BERNOULLI-Polynome lauten:

$$B_0(x) = 1 \qquad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \qquad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} \qquad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \qquad B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

Bernoulli-Polynome und Zahlen II

Die Bernoulli-Zahlen und Polynome haben die folgenden Eigenschaften:

Lemma

Die Bernoulli-Polynome $B_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ sind eindeutig bestimmt und es gilt:

1. $$(-)^n B_n(1-x) = B_n(x) \tag{164}$$
2. $$\int_0^1 dx\, B_n(x) = 0 \tag{165}$$
3.
   1. $$(-)^n B_{2n-1}(x) > 0, \qquad \forall x \in]0, 1/2[\tag{166}$$
   2. $$(-)^n [B_{2n}(x) - B_{2n}] > 0, \qquad \forall x \in]0, 1[\tag{167}$$
   3. $$(-)^{n+1} B_{2n} > 0 \tag{168}$$

Beweis:
Zunächst folgt aus der Definition (162), dass $B_n(x)$ ein Polynom vom Grade n ist und die folgende Darstellung besitzt.

$$B_n(x) = x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \tag{169}$$

Bernoulli-Polynome und Zahlen III

Der Koeffizient vor der höchsten Potenz muss 1 sein, da dies durch $B_0(x)$ und $B_1(x)$ festgelegt wird. Somit ist für ein festes n das BERNOULLI-Polynome $B_{n+1}(x)$ bis auf eine Integrationskonstante definiert. Diese wird aber durch die Randbedingungen (163) eindeutig festgelegt. Man beachte, dass durch die Definition von $n \to n+1$ zunächst nur eine Konstante frei ist, aber die Randbedingung auch nur jedes zweite BERNOULLI-Polynom fixiert. Nach zweifacher Integration von (169) für $B_{2n-1}(x)$ ergibt sich:

$$B_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + \frac{(2n+1)(2n)}{(2n)(2n-1)}\alpha_{2n-2}x^{2n} + \cdots + \frac{(2n+1)(2n)}{2}\alpha_0 x^2 + (2n+1)\beta_1 x + \beta_0$$

womit β_0 und β_1 über $B_{2n+1} = B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0$ bestimmt sind. Die BERNOULLI-Zahlen B_{2n} sind damit über (162) ebenso bestimmt. Zusammengefasst sind BERNOULLI-Zahlen und Polynome eindeutig bestimmt und wir können die Eigenschaften 1.-3. betrachten:

1. Dies folgt aus der Definition, da die Polynome: $\tilde{B}_n(x) \doteq (-)^n B_n(1-x)$ ebenso die Definitionsgleichungen erfüllen und für $n = 0, 1$ folgt: $B_0(x) = 1 = \tilde{B}_0(x)$ sowie $B_1(x) = x - 1/2 = -(1 - x - 1/2) = \tilde{B}_1(x)$.
2. Ebenso wie $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1)$ gilt, folgt nach Gleichung (164), dass gilt: $B_{2n}(0) = B_{2n}(1) = B_{2n}$. Hieraus folgt unmittelbar:

$$\int_0^1 dx\, B_n(x) = \frac{1}{n+1}\left[B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)\right] = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bernoulli-Polynome und Zahlen IV

3. Per Induktion folgt: $-B_1(x) = 1/2 - x$ also (166). Nehmen wir also an die Behauptung (166) gelte für n, dann folgt zunächst:

$$\frac{(-)^n}{2n}[B_{2n}(x) - B_{2n}] = (-)^n \int_0^x dt\ B_{2n-1}(t) > 0,$$

für $0 < x \leq /2$. Aufgrund der Symmetrie (164) gilt dies dann auch für $1/2 \leq x < 1$ und damit insgesamt die Aussage aus Teil b). Damit folgt aber für $x = 1$ zusammen mit (163):

$$\int_0^1 dt\ \underbrace{(-1)^n\,[B_{2n}(t) - B_{2n}]}_{>0} = -(-)^n B_{2n},$$

also $(-)^{n+1}B_{2n} > 0$ und damit folgt Teil c). Es bleibt der Induktionsschritt von $n \to n+1$ zu zeigen: Dazu bemerken wir zunächst, dass wegen (164) $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1/2) = 0$ gilt. Hätte nun $B_{2n+1}(x)$ in $]0, 1/2[$ eine Nullstelle, so hätte auch $B^{(2)}_{2n+1}(x) = (2n+1)(2n)B_{2n-1}(x)$ eine Nullstelle, was aber im Widerspruch zur Annahme ist, also hat $B_{2n+1}(x)$ keine Nullstelle in dem Bereich und das Vorzeichen ist gegeben durch: $\mathrm{sgn}(B^{(1)}_{2n+1}(0)) = \mathrm{sgn}((2n+1)B_{2n}) \overset{(168)}{=} (-)^{n+1}$. Damit ist die Aussage für $n+1$ gezeigt, und damit die gesamte Aussage 3.

Euler-MacLaurin Summenformel I

Theorem (Euler-MacLaurin Summenformel)

Sei $f \in \mathcal{C}^{(2k)}([\alpha,\beta])$ eine $2k$-mal stetig differenzierbare Funktion im Intervall $[\alpha,\beta]$. Dieses Intervall sei aufgeteilt in N gleiche Teile und es sei $h = (\beta-\alpha)/N$. Dann existiert ein θ, $1 > \theta > 0$, welches von $f^{(2k)}(x)$ auf $[\alpha,\beta]$ abhängt, so dass gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} f(\alpha+nh) &= \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\beta} dt\; f(t) + \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2} + \sum_{l=1}^{k-1}\frac{h^{2l-1}}{(2l)!}B_{2l}[f^{(2l-1)}(\beta)-f^{(2l-1)}(\alpha)] \\ &\quad + \frac{h^{2k}}{(2k)!}B_{2k}\sum_{n=0}^{N-1} f^{(2k)}(\alpha+nh+\theta h). \qquad (170)\end{aligned}$$

Hierbei sind B_l die Bernoulli-*Zahlen.*

Beweis:
Wir betrachten zunächst:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dt\; f(t) &= B_1(t)f(t)|_0^1 - \int_0^1 B_1(t)f^{(1)}(t), \\ \int_0^1 B_1(t)f^{(1)}(t) &= \frac{1}{2}\; B_2(t)f^{(1)}(t)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 B_2(t)f^{(2)}(t), \\ \int_0^1 B_n(t)f^{(n)}(t) &= \frac{1}{n+1}\; B_{n+1}(t)f^{(n)}(t)\Big|_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(t)f^{(n+1)}(t). \qquad (171)\end{aligned}$$

Euler-MacLaurin Summenformel II

Beachten wir nun (163), so erhalten wir aus Gleichung (171):

$$\int_0^1 dt\ f(t) = \frac{1}{2}(f(1)+f(0)) - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(f^{(2l-1)}(1) - f^{(2l-1)}(0)\right) + \mathcal{E}_k, \tag{172}$$

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^1 dt\ B_{2k-1}(t) f^{(2k-1)}(t). \tag{173}$$

Für den Restterm erhält man durch erneute partielle Integration:

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{(2k)!}\underbrace{\left[(B_{2k}(t)-B_{2k})f^{(2k-1)}\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{(2k)!}\int_0^1 dt\ \left[B_{2k}(t)-B_{2k}\right] f^{(2k)}(t). \tag{174}$$

Das Argument $[B_{2k}(t) - B_{2k}]$ im Integral ändert laut (167) das Vorzeichen nicht. Damit sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt und wir können den Restterm schreiben in der Form:

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{(2k)!} B_{2k} f^{(2k)}(\theta), \qquad 0 < \theta < 1. \tag{175}$$

Nun betrachten wir:

$$\int_0^N dt\ f(t) = \sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1} dt\ f(t) = \sum_{n=0}^{N-1}\int_0^1 dt\ f(t+n)$$

Euler-MacLaurin Summenformel III

und setzen (172) ein:

$$\int_0^N dt\ f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f(n)+f(n+1)}{2} - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \sum_{n=0}^{N-1} \left[f^{(2l-1)}(n+1) - f^{(2l-1)}(n) \right] + \frac{B_{2k}}{(2k)!} \sum_{n=0}^{N-1} f^{(2k)}(\theta+n)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} f(n) - \frac{f(0)+f(N)}{2} - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \left[f^{(2l-1)}(N) - f^{(2l-1)}(0) \right] + \frac{B_{2k}}{(2k)!} \sum_{n=0}^{N-1} f^{(2k)}(\theta+n)$$

Es bleibt noch eine Variablensubstitution übrig: $t \mapsto x = ht + \alpha$ mit $h = (\beta - \alpha)/N$. Unter Beachtung der jeweiligen Transformationsregel für Integration und Differentiation gelangt man zu:

$$\frac{1}{h} \int_\alpha^\beta dx f(x) = \sum_{n=0}^{N} f(\alpha + nh) - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} - \sum_{l=1}^{k-1} h^{2l-1} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \left[f^{(2l-1)}(\beta) - f^{(2l-1)}(\alpha) \right] + \mathcal{E}_k \tag{176}$$

mit

$$\mathcal{E}_k = -h^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \sum_{n=0}^{N-1} f^{(2k)}(\alpha + nh + \theta h). \tag{177}$$

Durch Umstellung folgt (170).

Beispiel zur Euler-Maclaurin Formel

Beispiel (Euler-Maclaurin mit $k = 1$)

$$\sum_{n=0}^{N} f(\alpha + nh) = \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\beta} dt\ f(t) + \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \frac{h^2}{12}\sum_{n=0}^{N-1} f^{(2)}(\alpha + nh + \theta h). \tag{178}$$

In der statistischen Mechanik wird oft eine Approximation für die Größe $N!$ benötigt, wenn N eine sehr große Zahl ist, etwa die Zahl der Teilchen eines Systems. Um eine erste heuristische Abschätzung zu bekommen, geben wir eine grobe Näherung an, die man mittels der Sattelpunktsmethode noch verbessern kann. Es ist einfacher die Approximation zunächst für den Logarithmus zu suchen. Wir gehen aus von der Identität:

$$\ln N! = \sum_{n=1}^{N} \ln n \tag{179}$$

Nach der Euler-MacLaurin-Formel gilt nun:

$$\sum_{n=1}^{N} \ln n = \int_{1}^{N} dt\ \ln t + \frac{\ln(1) + \ln(N)}{2} - \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+\theta)^2} \tag{180}$$

woraus folgt:

$$\ln N! = N \ln N - N + \frac{\ln N}{2} + \mathcal{O}(1). \tag{181}$$

Äquivalente Formen der Euler-MacLaurin-Formel

Beispiel ($k = \infty,\ \alpha = 0,\ h = 1$)

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^N dt\ f(t) + \frac{f(0) + f(N)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \left[f^{(2l-1)}(N) - f^{(2l-1)}(0) \right] \tag{182}$$

Beispiel ($k = \infty,\ \alpha = N_0,\ \beta = N_1;\ N = N_1 - N_0$)

$$\sum_{n=N_0}^{N_1} f(n) = \int_{N_0}^{N_1} dt\ f(t) + \frac{f(N_0) + f(N_1)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \left[f^{(2l-1)}(N_1) - f^{(2l-1)}(N_0) \right] \tag{183}$$

Beispiel ($k = \infty,\ h = \Delta V$)

$$\sum_{n=0}^{N} f(n\Delta V) = \frac{1}{\Delta V} \int_0^{N\Delta V} dt\ f(t) + \frac{f(0) + f(N\Delta V)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \left[f^{(2l-1)}(N\Delta V) - f^{(2l-1)}(0) \right] \tag{184}$$