Gruppen- und Darstellungstheorie in der Physik

Michael Karbach

Bergische Universität Wuppertal
Fachgruppe Physik

SS08 – Wuppertal
September 25, 2008

Übersicht

Modalitäten zu Gruppen- und Darstellungstheorie

V0 - 0704

- **Vorlesung - Übungen**
  - Je Woche: 2SWS Vorlesung + 2SWS Übungen
  - Je Veranstaltung 2 * 45min mit 5min Pause
  - Übungsblätter Mittwochs Ausgabe und 1 Woche später Abgabe
  - Montags Besprechung der Übung
- **Scheinvergabe**
  - 10 Übungen die zu 50% in die Note eingehen
  - Eine Hausarbeit im Umfang von etwa 3 Übungszettel die zu 50% in die Note eingehen
- **Kommunikation**
  - `http://www.karbach.org`
  - Jederzeit erreichbar über E-mail: `michael@karbach.org` Subject: SS08:xxx
  - Übungsblätter über Website abrufbar `www.karbach.org/gdtp.html`

Literatur zur Vorlesung Gruppen- und Darstellungstheorie

- **Gruppen Allgemein**
  - Miller: *Symmetry Groups and Their Applications*:
  - Hammermesh: *Group Theory and its Application to Physical Problems*
  - Stiefel & Fäsler: *Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendungen*
- **Lie-Gruppen und Lie-Algebren**
  - Humphreys: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*
- **Darstellungstheorie**
  - Fulton & Harris: *Representation Theory*

Gruppen

V1 - 0904

Definition

Eine **Gruppe** G ist eine Menge von Elementen $\{g_1, g_2, \ldots\}$ zusammen mit einer binären Operation:

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{G} \times \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{G} \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 \circ g_2, \end{aligned} \tag{1}$$

die folgenden Bedingungen genügt:

1. Es existiert ein **neutrales Element** $e \in \mathrm{G}$, so dass gilt:

$$g \circ e = e \circ g = g, \quad \forall g \in \mathrm{G}. \tag{2}$$

2. Für jedes Element $g \in \mathrm{G}$ existiert ein **inverses Element** g^{-1}, so dass gilt:

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e. \tag{3}$$

3. Es gilt das **Assoziativ-Gesetz**:

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3), \quad \forall g_i \in \mathrm{G}. \tag{4}$$

Definition

Eine Teilmenge H einer Gruppe G, die selber eine Gruppe ist, ist eine **Untergruppe** von G.

Untergruppen und Konjugationsklassen I

Im Folgenden werden wir das Gruppenverknüpfungszeichen '$\circ$' weglassen oder oft durch ein gewöhnliches '$\cdot$' bzw ein '$+$' ersetzen. Aus dem Kontext bzw. der konkreten Gruppe wird klar sein, welche Verknüpfung im Einzelnen verwendet wurde.

Definition

Die Anzahl der Elemente $n(\mathrm{G}) = |\mathrm{G}|$ einer Gruppe nennen wir die **Ordnung der Gruppe**. Ist $n(\mathrm{G}) < \infty$, so bezeichnen wir die Ordnung als endlich. Wir nennen $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ eine **Untergruppe**, wenn H selbst eine Gruppe ist.

Lemma (Lagrange)

Es sei H *eine Untergruppe der endlichen Gruppe G, dann gilt für die Ordnungen:*

$$|G|/|H| = m \in \mathbb{N}$$

Die ganze Zahl m nennt man den **Index** *der Untergruppe* H.

Beweis: Sei $\mathrm{H} = \{e, h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ eine echte Untergruppe von G mit Ordnung $n = |\mathrm{H}|$. Dann existiert ein $g \in \mathrm{G}$, $g \notin \mathrm{H}$ und die Menge $g\mathrm{H} = \{g, gh_1, \ldots, gh_n\}$ hat ebenfalls die Ordnung n. Es gilt $gh_i \neq gh_j$ und $gh_i \notin \mathrm{H}$, denn wäre $gh_i \in \mathrm{H}$ so würde ein $h_j \in \mathrm{H}$ existieren mit $gh_i = h_j$ und damit gelten $g = h_j h_i^{-1} \in \mathrm{H}$, was einen Widerspruch zur Annahme ist. Nun nehmen wir ein weiteres $g' \in \mathrm{G}$, $g' \notin \mathrm{H}$, dann gilt für $g'\mathrm{H}$ das selbe wie für $g\mathrm{H}$ und zusätzlich gilt $g'\mathrm{H}$ und $g\mathrm{H}$ haben keine gemeinsamen Elemente, denn nehmen wir an es existiert ein h_i, h_j, so dass gilt $g'h_i = gh_j$, dann würde folgen $g' = gh_j h_i^{-1}$ und damit letztlich $g'\mathrm{H} \subset g\mathrm{H}$ und umgekehrt aus $g'h_i h_j^{-1}$ folgt: $g\mathrm{H} \subset g'\mathrm{H}$ also entweder $g\mathrm{H} = g'\mathrm{H}$ oder es gibt kein gemeinsames Element. Diesen Prozess kann man mit einem g'' wiederholen und solange weiterführen bis alle Elemente aus G ausgeschöpft sind.

Untergruppen und Konjugationsklassen II

Definition

Eine Gruppe nennen wir **abelsche** Gruppe, wenn alle Elemente der Gruppe kommutieren:

$$[g_1, g_2] \equiv g_1 g_2 - g_2 g_1 = 0 \tag{5}$$

Die Klammer $[\cdot,\cdot]$ nennt man **Kommutator**.

Definition

Gegeben sei eine Gruppe G mit Elementen h, k. Wir nennen h **konjugiert** zu k, wenn es ein Element $g \in \mathrm{G}$ gibt, so dass gilt: $k = ghg^{-1}$ und schreiben kurz dafür $h \sim k$. Die Untergruppe $\mathrm{H} \subset G$ ist **konjugiert** zur Untergruppe $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$, wenn es ein $g \in \mathrm{G}$ gibt, so dass gilt $\mathrm{K} = g\mathrm{H}g^{-1}$. Wir nennen eine Untergruppe $\mathrm{N} \subset \mathrm{G}$ **normal** oder **selbstkonjugiert**, wenn gilt: $\mathrm{N} = g\mathrm{N}g^{-1}$, $\forall g \in \mathrm{G}$.

Die Konjugation bildet eine Äquivalenz-Relation und teilt die Gruppe G in Klassen äquivalenter Elemente ein.

Definition

Die **Konjugationsklasse** von $h \in \mathrm{G}$ ist definiert durch

$$G \bullet h \doteq \{ghg^{-1} | g \in \mathrm{G}\} \tag{6}$$

Zwei Klassen $G \bullet h$ und $\mathrm{G} \bullet h'$ / sind disjunkt oder identisch.

Untergruppen und Konjugationsklassen III

Lemma

Für eine endliche Gruppe G *ist*

$$\mathrm{H}^g \doteq \{h \in G : hgh^{-1} = g\}$$

H^g *eine Untergruppe und damit* $|\mathrm{G}|/|\mathrm{H}^g| \in \mathbb{N}$.

Definition

Zu jedem Element g einer Gruppe G definieren wir:

$$g^n \doteq \begin{cases} e & : n = 0 \\ \underbrace{gg\cdots g}_{n \text{ mal}} & : n > 0 \\ \underbrace{g^{-1}g^{-1}\cdots g^{-1}}_{n \text{ mal}} & : n < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Definition

Eine Untergruppe $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ nennen wir **zyklisch**, wenn jedes Element $h \in \mathrm{H}$ geschrieben werden kann in der Form $h = g^m,\ m \in \mathbb{N}$.

Gruppenmulitplikationstabelle I

Definition

Die Ordnung m eines Gruppenelementes g ist die Ordnung der durch g generierten zyklischen Untergruppe: $\{g, g^2, ..., g^m = e\}$.

Gruppenmulitplikationstabelle der Gruppe $\mathrm{G} = \{e, g_1, ..., g_{n-1}\}$

e	g_1	g_2	$\cdots$	g_{n-1}
g_1	$g_{i_1 j_1}$	$g_{i_1 j_2}$	$\cdots$	$g_{i_1 j_{n-1}}$
g_2	$g_{i_2 j_1}$	$g_{i_2 j_2}$	$\cdots$	$g_{i_2 j_{n-1}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
g_{n-1}	$g_{i_{n-1} j_1}$	$g_{i_{n-1} j_2}$	$\cdots$	$g_{i_{n-1} j_{n-1}}$

Es gilt $g_{i_l j_k} = g_{i_l} g_{i_k}$. Nur für eine abelsche Gruppe gilt: $g_{i_l j_k} = g_{j_k i_l}$.

Die beiden Vierergruppen V der Ordnung $n = 4$

i)

e	a	b	c
a	b	c	e
b	c	e	a
c	e	a	b

ii)

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Homomorphismus

Definition

Ein **Homomorphismus** μ ist eine Abbildung $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ mit $g \mapsto \mu(g) = g' \in \mathrm{G}'$, so dass gilt: $\mu(g_1 \circ g_2) = \mu(g_1) \cdot \mu(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathrm{G}$. Gilt zusätzlich $\mu(g_1) \neq \mu(g_2)$, $\forall g_1 \neq g_2$, so handelt es sich um ein **Isomorphismus**, wenn zusätzlich noch gilt $\mu(\mathrm{G}) = \mathrm{G}'$.
Zwei Gruppen G und G′ heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\mu : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ gibt.

Sei e die Identität in G und μ_e die Identität in G′, dann gilt :

$$\begin{aligned} \mu(e) = \mu(e \circ e) = \mu(e) \cdot \mu(e) \quad &\Longrightarrow \quad \mu(e) = e_\mu \\ e_\mu = \mu(e) = \mu(g \circ g^{-1}) = \mu(g)\mu(g^{-1}) \quad &\Longrightarrow \quad \mu(g^{-1}) = \mu(g)^{-1} \end{aligned}$$

Definition

Das **direkte Produkt** $\mathrm{G} \times \mathrm{G}'$ ist die Gruppe, die aus allen geordneten Paaren (g, g') mit $g \in \mathrm{G}$ und $g' \in \mathrm{G}'$ besteht. Das Produkt zweier Gruppenelemente ist definiert durch:

$$(g_1, g_1')(g_2, g_2') \doteq (g_1 g_2, g_1' g_2'). \tag{8}$$

Es ist unmittelbar aus der Definition einsichtig, dass (e, e') das neutrale Element und (g^{-1}, g'^{-1}) das inverse Element von $\mathrm{G} \times \mathrm{G}'$ ist.

Permutationen

V2 - 1604

Definition

Eine **Permutation** σ einer nicht leeren Menge $X = \{x_1, x_2, ...\}$ ist eine Bijektion auf X: $X \ni x \mapsto \sigma(x) \in X$.

Eine Permutation σ ist dann eine Abbildung für die gilt:

1. $$\sigma(x_i) = \sigma(x_j) \Leftrightarrow x_i = x_j$$

2. $$\forall x_k \in X \quad \exists \quad \text{a } x_j \in X, \text{ so dass gilt: } \sigma(x_j) = x_k$$

Definition

Die Menge S_X aller Permutationen von X bildet die **volle symmetrische Gruppe auf** X.

Das Produkt zweier Permutationen $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{S}_X$ ist offenbar wieder eine Permutation und wir schreiben:

$$\sigma_1\sigma_2(x) = \sigma_1(\sigma_2(x)), \qquad \forall x \in X$$

Definition

Eine **Transformationsgruppe** auf X ist eine Untergruppe von S_X.

Symmetrische Gruppe S_n I

Definition

Die Menge S_n aller $n!$ Permutationen von n Objekten bildet die **symmetrische Gruppe**. Eine Permutation ist definiert durch:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \tag{9}$$

Die zu σ inverse Permutationen lautet:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \tag{10}$$

Das neutrale Element ist gegeben durch:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \tag{11}$$

Ist eine weitere Permutation

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

gegeben, dann ist das Produkt:

$$\sigma' \circ \sigma = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

auch eine Permutation und damit ein Element aus S_n.

Symmetrische Gruppe S_n II

In der Praxis verwendet man die **zyklische Notation** für allgemeine Permutationen, die am einfachsten am folgenden Beispiel einer Permutation $\sigma \in S_{10}$ erläutert werden kann:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 0 & 4 & 3 & 9 & 8 & 2 \end{pmatrix} = (0154)(279)(36)(8)$$

Man erkennt zum einen, dass es egal ist mit welchem Element man in einer Klammer $'()'$ startet und zum anderen, dass wenn zwei verschiedene Klammern keine gemeinsame Elemente enthalten die Reihenfolge in der Anwendung vertauscht werden kann. Dies verdeutlicht das Beispiel:

$$t = (792)(5401)(63)(8) = (8)(36)(4015)(927) = \dots.$$

Tauchen in den Klammern gemeinsame Elemente auf, dann dürfen die Klammern nicht vertaucht werden und wir wenden dann die Permutation von links nach rechts an. Jede zyklische Permutation setzt sich zusammen aus Permutation von zwei Objekten, die man dann auch Transposition nennt. Es gilt:

$$(1234\dots n) = (1n)(1n-1)\dots(13)(12) = (12)(23)\dots(n-1n)$$

Ist die Anzahl der Elemente klar, dann lässt man häufig die Klammern mit nur einem Element ganz weg. Insgesamt erkennt man, dass jede Permutation aus verschiedenen Zyklen zusammengesetzt werden kann.
Beispiel: Betrachten wir die Permutation $t \in S_8$:

$$(1537)(716)(85) = (15)(53)(37)(71)(16)(85) = (16)(3758) = (3758)(16) = \dots$$

Beispiel: S_3

Beispiel: Betrachte die Gruppe $S_3 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_6\}$ der Ordung $|S_3| = 6$:

$$\sigma_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) = (12)(23), \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) = (13)(32),$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23), \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13), \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12).$$

Man beachte, dass für jede Transposition gilt: $(ij)(ij) = e$, sowie $\sigma_i = \sigma_i^{-1}$, $i = 4, 5, 6$ und $\sigma_2 = \sigma_3^{-1}$. Damit folgt für die Gruppenmultiplikationstabelle:

e	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_3	e	σ_6	σ_4	σ_5
σ_3	e	σ_2	σ_5	σ_6	σ_4
σ_4	σ_5	σ_6	e	σ_2	σ_3
σ_5	σ_6	σ_4	σ_3	e	σ_2
σ_6	σ_4	σ_5	σ_2	σ_3	e

Für die Konjugationsklassen gilt:

$$\begin{aligned} S_3 \bullet \sigma_1 &= \{\sigma_1\} \\ S_3 \bullet \sigma_2 &= S_3 \bullet \sigma_3 = \{\sigma_2, \sigma_3\} \\ S_3 \bullet \sigma_4 &= S_3 \bullet \sigma_5 = S_3 \bullet \sigma_6 = \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} \end{aligned}$$

Es existieren die folgenden echten Untergruppen $S_3^{\sigma_i}$:

$$\begin{aligned} &S_3^{\sigma_2} = S_3^{\sigma_2} = \{e, \sigma_2, \sigma_3\} \\ &S_3^{\sigma_4} = \{e, \sigma_4\}, \quad S_3^{\sigma_5} = \{e, \sigma_5\}, \quad S_3^{\sigma_6} = \{e, \sigma_6\} \end{aligned}$$

Diedergruppe

Definition

Die Menge aller Drehungen und Spiegelungen in der Ebene, die ein n-Eck in sich überführt nennt man die **Diedergruppe** und bezeichnet man mit D_n.

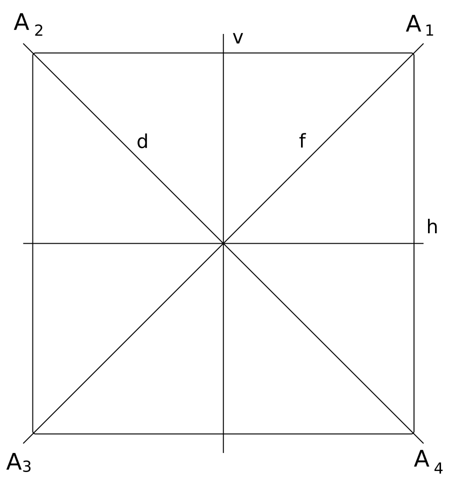
Die Ordnung der Diedergruppe ist $|D_n| = 2n$.
Beispiel: Die Diedergruppe D_4
Die Drehungen gegen den Uhrzeigersinn bezeichnen wir mit:

$$\mathbf{R}_{90}, \mathbf{R}_{180}, \mathbf{R}_{270},$$

die Spiegelungen an den eingezeichneten Geraden (d, f, v, h) seien:

$$\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{H}, \mathbf{V}.$$

Zusammen mit der Identität **1** ergibt sich die Ordnung der Gruppe zu: $|D_4| = 8$.
Die einzelnen Symmetrieoperationen kann man auch durch die Permutationen der Eckpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 ausgedrücken.
Es ist offenbar, dass zu jedem Element der Gruppe ein Inverses existiert. Eine Konjugationsklasse ist etwa $\{\mathbf{H}, \mathbf{V}\}$. Insgesamt gibt es für diese Gruppe 5 Konjugationsklassen (siehe Übungen).



Die allgemeine und spezielle lineare Gruppe I

Definition

Die **komplexe (reelle) allgemeine lineare Gruppe** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ oder $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist definiert durch:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \doteq \{\mathbf{M} = M_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq n : M_{ij} \in \mathbb{C} \text{ und } \det \mathbf{M} \neq 0\}, \tag{14}$$

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \doteq \{\mathbf{M} = M_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq n : M_{ij} \in \mathbb{R} \text{ und } \det \mathbf{M} \neq 0\}. \tag{15}$$

Die Anzahl freier Parameter für $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist $2n^2$ bzw. n^2.

Definition

Die **komplexe (reelle) spezielle lineare Gruppe** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ oder $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist definiert durch:

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \doteq \{\mathbf{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \det \mathbf{M} = 1\}, \tag{16}$$

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \doteq \{\mathbf{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det \mathbf{M} = 1\}. \tag{17}$$

Die Anzahl freier Parameter für $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist $2n^2 - 2$ bzw. $n^2 - 1$.

Die unitäre und spezielle unitäre Gruppe I

Definition

Die **unitäre lineare Gruppe** U_n ist definiert durch:

$$\mathrm{U}_n \doteq \{\mathbf{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \mathbf{M}^\dagger \mathbf{M} = \mathbf{1}\}. \tag{18}$$

Die Anzahl freier Parameter für U_n ist n^2, und es gilt $\mathbf{M}^\dagger = \bar{\mathbf{M}}^t$ und:

$$\mathbf{M}^t \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{M}} \mathbf{M}^t = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{M}}^\dagger = \mathbf{M}^{-1}. \tag{19}$$

Definition

Die **komplexe (reelle) spezielle lineare Gruppe** SU_n ist definiert durch:

$$\mathrm{SU}_n \doteq \{\mathbf{M} \in \mathrm{U}_n : \det \mathbf{M} = 1\}. \tag{20}$$

Die Anzahl freier Parameter für SU_n ist: $n^2 - 1$.
<u>Beispiel:</u> Es sei $\mathbf{M} \in \mathrm{SU}_2$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Lösen wir diese Gleichungen auf, so folgt die Darstellung für Matrizen aus SU_2:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{22}$$

Die orthogonale und speziell orthogonale Gruppe O I

Definition

Die **orthogonale lineare Gruppe** O_n ist definiert durch:

$$\mathrm{O}_n \doteq \{\mathbf{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{M}^t\mathbf{M} = \mathbf{1}\}. \tag{23}$$

Die Anzahl freier Parameter für O_n ist: $n(n-1)/2$.

Definition

Die **spezielle orthogonale lineare Gruppe** SO_n ist definiert durch:

$$\mathrm{SO}_n \doteq \{\mathbf{M} \in \mathrm{O}_n : \det \mathbf{M} = 1\}. \tag{24}$$

Die Anzahl freier Parameter für SO_n ist wie im Fall O_n: $n(n-1)/2$.

Die Euklidische Gruppe I

Definition

Gegeben sei ein affiner Raum $\mathbb{R}^3$, dann ist die **Euklidische Gruppe** E_3 definiert durch die Menge aller **Isometrien** $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so dass also gilt:

$$\|\mathbf{T}x - \mathbf{T}y\| = \|x - y\|. \tag{25}$$

Theorem

Die Menge E_3 bildet eine Gruppe.

Beispiel: Betrachte die Menge aller Translationen $\mathbf{T}_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{T}_a |x\rangle \doteq |a\rangle + |x\rangle = |a + x\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{T}_a \circ \mathbf{T}_b = \mathbf{T}_b \circ \mathbf{T}_a = \mathbf{T}_{a+b} \tag{26}$$

Diese Transformationen bilden also eine abelsche Untergruppe von E_3.

Theorem

Jede Isometrie $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{a,\mathbf{M}} \in \mathrm{E}_3$ kann geschrieben werden in der Form:

$$\mathbf{T}_{a,\mathbf{M}} |x\rangle = |a\rangle + \mathbf{M} |x\rangle , \qquad |x\rangle , |a\rangle \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{M} \in \mathrm{O}_3 \tag{27}$$

und die Gruppenmultiplikation ist gegeben durch:

$$\mathbf{T}_{a_1,\mathbf{M}_1} \circ \mathbf{T}_{a_2,\mathbf{M}_2} = \mathbf{T}_{a_1+\mathbf{M}_1 a_2,\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2} \tag{28}$$

Die Lorentzgruppe Gruppe

Definition

Die **Lorentzgruppe** L_4 ist definiert durch:

$$L_4 \doteq \{\mathbf{\Lambda} = \Lambda_{ij}, \quad 0 \leq i,j \leq 3 : \Lambda_{ij} \in \mathbb{R} \text{ und } \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{G} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{G}\}, \tag{29}$$

wobei der **metrische Tensor G** definiert ist als:

$$\mathbf{G} \doteq g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Lemma

Die Lorentzgruppe L_4 lässt die Bilinearform $\langle x | \mathbf{G} | x \rangle$ invariant.

Beweis: Sei $|y\rangle = \mathbf{\Lambda} |x\rangle$ dann gilt:

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = \langle y | \mathbf{G} | y \rangle = (\mathbf{\Lambda} |x\rangle)^t \mathbf{G} (\mathbf{\Lambda} |x\rangle) = \langle x | (\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{G} \mathbf{\Lambda}) | x \rangle = \langle x | \mathbf{G} | x \rangle = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Im Zusammenhang mit der Lorentzgruppe bezeichnet man die Vektoren aus dem zu Grunde liegenden Vektorraum auch als **Vierervektoren**.

Die eigentliche Lorentzgruppe

Man unterscheidet nun noch verschiedene Komponenten der Lorentzgruppe. Bilden wir die Determinante von $\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{G} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{G}$, so erhalten wir $\det \mathbf{\Lambda} = \pm 1$.

$$1 = g_{00} = \left(\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{G} \mathbf{\Lambda}\right)_{00} = \sum_{i,j=0}^{3} (\Lambda^t)_{0i} g_{ij} \Lambda_{j0} = \Lambda_{00}^2 - \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{20}^2 - \Lambda_{30}^2. \tag{31}$$

Dies bedeutet $|\Lambda_{00}| \geq 1$. Wir können also insgesamt vier Fälle unterscheiden und deswegen definieren wir.

Definition

Es sei die Lorentzgruppe L_4 gegeben, dann definieren wir die Komponenten:

$$L^{\uparrow +} \doteq \{\mathbf{\Lambda} \in L_4 : \mathbf{\Lambda}_{00} \geq +1, \ \det \mathbf{\Lambda} = +1\} \tag{32}$$
$$L^{\uparrow -} \doteq \{\mathbf{\Lambda} \in L_4 : \mathbf{\Lambda}_{00} \geq +1, \ \det \mathbf{\Lambda} = -1\} \tag{33}$$
$$L^{\downarrow +} \doteq \{\mathbf{\Lambda} \in L_4 : \mathbf{\Lambda}_{00} \leq -1, \ \det \mathbf{\Lambda} = +1\} \tag{34}$$
$$L^{\downarrow -} \doteq \{\mathbf{\Lambda} \in L_4 : \mathbf{\Lambda}_{00} \leq -1, \ \det \mathbf{\Lambda} = -1\} \tag{35}$$

Die Komponente $L^{\uparrow +}$ nennen wir die **eigentliche Lorentzgruppe.**

Es genügt diese eigentliche Lorentzgruppe näher zu untersuchen, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden. Nur diese Komponente bildet wiederum eine Gruppe und ist somit eine echte Untergruppe der Lorentzgruppe. Die anderen drei Komponenten bilden hingegen keine Untergruppe.

Die eigentliche Lorentzgruppe II

Lemma

Die eigentliche Lorentzgruppe $\mathsf{L}^{\uparrow +} \subset \mathsf{L}_4$ *ist eine Untergruppe der Lorentzgruppe und es gilt:*

1. $$\mathsf{L}^{\downarrow -} = (-\mathbf{G})\mathsf{L}^{\uparrow +} = \mathsf{L}^{\uparrow +}(-\mathbf{G}) \tag{36}$$
2. $$\mathsf{L}^{\downarrow +} = (-\mathbf{1})\mathsf{L}^{\uparrow +} \tag{37}$$
3. $$\mathsf{L}^{\uparrow -} = \mathbf{G}L^{\uparrow +} = \mathsf{L}^{\uparrow +}\mathbf{G} \tag{38}$$

Beweis: Untergruppeneigenschaft: Seien $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}' \in \mathsf{L}^{\uparrow +}$, dann gilt auf Grund der Schwarzschen Ungleichung::

$$0 \leq \left| \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{0j}\Lambda'_{j0} \right| \overset{SUG}{\leq} \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \Lambda_{0j}^2 \sum_{i=1}^{3} \Lambda'^2_{i0}} \overset{(31)}{=} \sqrt{(\Lambda_{00}^2 - 1)(\Lambda'^2_{00} - 1)} \overset{(32)}{<} \Lambda_{00}\Lambda'_{00} = 1.$$

Daraus folgt dann aber:

$$(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}')_{00} = \Lambda_{00}\Lambda'_{00} + \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{0j}\Lambda'_{j0} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}')_{00} \geq 1$$

Desweiterten gilt: $\det(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}') = \det \mathbf{\Lambda} \det \mathbf{\Lambda}' = 1$. Die Inverse einer eigentlichen Lorentztransformation ist gegeben durch $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{G}\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{G}$, und es gilt: $(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{00} = (\mathbf{G}\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{G})_{00} = \mathbf{\Lambda}_{00}$ und $\det \mathbf{\Lambda}^{-1} = \det \mathbf{G} \det \mathbf{\Lambda}^t \det \mathbf{G} = \det \mathbf{\Lambda}$.
Eigenschaften 1.-3. und zeigen nur die erste Eigenschaft: Definieren wir die Matrix $\mathbf{S} \doteq -\mathbf{G}$, offenbar gilt $\mathbf{S} \in \mathsf{L}^{\downarrow -}$. Falls $\mathbf{\Lambda} \in \mathsf{L}^{\uparrow +}$ dann folgt: $\det(\mathbf{S\Lambda}) = \det(\Lambda\mathbf{S}) = \det \mathbf{S} = -1$ und $(\mathbf{S\Lambda})_{00} = (\mathbf{\Lambda S})_{00} = -\Lambda_{00} \leq 0$, so dass also $\mathbf{S\Lambda}, \mathbf{\Lambda S} \in \mathsf{L}^{\downarrow -}$. Ist umgekehrt $\mathbf{\Lambda} \in \mathsf{L}^{\downarrow -}$ dann sind $\mathbf{S\Lambda}, \mathbf{\Lambda S} \in \mathsf{L}^{\downarrow +}$.

Die eigentliche Lorentzgruppe in der Physik I

Die Lorentztransformation, erzeugt durch die Matrizen $\mathbf{G}, \mathbf{S} \equiv -\mathbf{G}, -\mathbf{1} = \mathbf{SG}$, haben eine spezielle Bedeutung in der Physik. Die **Raumspiegelung** wird erzeugt durch $\mathbf{S}$, Die **Zeitinversion** durch $\mathbf{G}$ und die **totale Inversion** durch $\mathbf{GS} = -\mathbf{1}$. Nun wollen wir die Lorentzgruppe genauer charakterisieren. Dazu werden wir einige Hilfsätze formulieren. Die Identität ist ein Element der Untergruppe $\mathsf{L}^{\uparrow +} \subset \mathsf{L}_4$, nicht jedoch die Raumspiegelung und die Zeitinversion.

Lemma

Sei $\mathbf{\Lambda} \in \mathsf{L}^{\uparrow +}$*, dann ist* $\mathbf{\Lambda} \in \mathsf{SO}_1 \times \mathsf{SO}_3$ *genau dann, wenn* $\Lambda_{00} = +1$.

Beweis: Zunächst gilt wieder:

$$\sum_{i=1}^{3} \Lambda_{0i}^2 = \sum_{i=1}^{3} \Lambda_{i0}^2 = \Lambda_{00}^2 - 1.$$

Da $\mathbf{\Lambda} \in \mathsf{L}^{\uparrow +}$ gilt, ist $\Lambda_{00} \geq 1$. Es ist $\Lambda_{0i} = \Lambda_{i0} = 0,\ i = 1, 2, 3$ genau dann, wenn $\Lambda_{00} = 1$. Umgekehrt ist $\Lambda_{00} = 1$ genau dann, wenn sich $\mathbf{\Lambda}$ schreiben läßt als:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{M} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{39}$$

Die Determinante der Matrix $\mathbf{M}$ ist dann gleich $+1$.

Die eigentliche Lorentzgruppe in der Physik II

Lemma

Seien $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}' \in \mathrm{L}^{\uparrow+}$ und es gelte $\mathbf{\Lambda} |v\rangle = \mathbf{\Lambda}' |v\rangle$ mit $|v\rangle = (1,0,0,0)^t$. Dann existiert eine eindeutige Matrix $\mathbf{M} \in \mathrm{SO}_1 \times \mathrm{SO}_3$, so dass $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}'\mathbf{M}$ gilt. Umgekehrt gilt, wenn $\mathbf{\Lambda}' \in \mathrm{L}^{\uparrow+}$ und $\mathbf{M} \in \mathrm{SO}_1 \times \mathrm{SO}_3$ mit der Eigenschaft $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}'\mathbf{M}$, dass gilt $\mathbf{\Lambda} |v\rangle = \mathbf{\Lambda}' |v\rangle$.

Beweis:

- Betrachten wir $\mathbf{\Lambda} |v\rangle = \mathbf{\Lambda}' |v\rangle$ für $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}' \in \mathrm{L}^{\uparrow+}$. Dann ist die Matrix $\mathbf{M} \equiv \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Lambda}' \in \mathrm{L}^{\uparrow+}$ und es ist $\mathbf{M} |v\rangle = |v\rangle$. Daraus folgt $M_{i0} = 0$ für $i = 1,2,3$ und $M_{00} = 1$. Mit dem zuvor gezeigten Lemma folgt dann $\mathbf{M} \in \mathrm{SO}_1 \times \mathrm{SO}_3$.
- Sei nun $\mathbf{\Lambda}' \in \mathrm{L}^{\uparrow+}$ und $\mathbf{M} \in \mathrm{SO}_1 \times \mathrm{SO}_3$ und $\mathbf{\Lambda}'\mathbf{M} \in \mathrm{L}^{\uparrow+}$, dann folgt: $\mathbf{M} |v\rangle = |v\rangle$ und $\mathbf{\Lambda}'\mathbf{M} |v\rangle = \mathbf{\Lambda}' |v\rangle$.

Somit kann die Gruppe $\mathrm{SO}_1 \times \mathrm{SO}_3 \simeq \mathrm{SO}_3$ als Untergruppe der Lorentzgruppe aufgefasst werden. Nun kommen wir zu einer in der Physik sehr wichtigen Darstellung der Lorentzgruppe.

Theorem

Jede Matrix $\mathbf{\Lambda} \in \mathrm{L}^{\uparrow+}$ kann dargestellt werden in der Form

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}_1 \exp(b\mathbf{B})\mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathrm{SO}_1 \times \mathrm{SO}_3, \; b \in \mathbb{R}, \tag{40}$$

mit

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Beweis: Siehe Übungen!

Die Poincare Gruppe I

ausgelassen im SS08

Definition

Gegeben sei ein affiner Raum $\mathbb{R}^4$, dann ist die **Poincare Gruppe** P_4 definiert durch die Menge aller **Isometrien** $\mathbf{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, so dass also gilt:

$$\langle \mathbf{T}x - \mathbf{T}y | \mathbf{G} | \mathbf{T}x - \mathbf{T}y \rangle = \langle x - y | \mathbf{G} | x - y \rangle . \tag{42}$$

Theorem

Die Menge P_4 bildet eine Gruppe.

Theorem

Jede Isometrie $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{a,\mathbf{\Lambda}} \in \mathrm{P}$ kann geschrieben werden in der Form:

$$\mathbf{T}_{a,\mathbf{\Lambda}} |x\rangle = |a\rangle + \mathbf{\Lambda} |x\rangle , \qquad |x\rangle , |a\rangle \in \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{\Lambda} \in \mathrm{L}_4 \tag{43}$$

und die Gruppenmultiplikation ist gegeben durch:

$$\mathbf{T}_{a_1,\mathbf{\Lambda}_1} \circ \mathbf{T}_{a_2,\mathbf{\Lambda}_2} = \mathbf{T}_{a_1+\mathbf{\Lambda}_1 a_2, \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2} \tag{44}$$

Beweis: analog zur Euklidischen Gruppe!

Die Gruppe besitzt 10 freie Parameter (3 Eulerwinkel, 3 Boostparameter und 4 Translationen)

Darstellungen

V3 - 2304

Definition

Es sei ein Vektorraum V gegeben. Wir bezeichnen die Gruppe aller nichtsingulären Transformationen mit GL(V).

Definition

Eine **Darstellung** einer Gruppe G mit dem Darstellungsraum V ist ein Homomorphismus:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathrm{G} &\rightarrow \mathrm{GL}(V) && (45)\\ g &\mapsto \mathbf{T}(g), \quad \forall g \in \mathrm{G}. && (46) \end{aligned}$$

Die **Dimension einer Darstellung** $\dim \mathbf{T} \doteq \dim V$ ist die Dimension des Darstellungsraums V.

Aufgrund der Homomorphismus-Eigenschaft gelten die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(g) \circ \mathbf{T}(g') &= \mathbf{T}(g \circ g') && (47)\\ \mathbf{T}(g)^{-1} &= \mathbf{T}(g^{-1}) && (48)\\ \mathbf{T}(e) &= \mathbf{1} && (49) \end{aligned}$$

für alle $g, g' \in \mathrm{G}$. Das neutrale Element in V nennen wir $\mathbf{1}$.

Darstellungen II

Definition

Eine n-**dimensionale Matrix-Darstellung** von $G \to GL_n(\mathbb{C})$ ist ein Homomorphismus $\mathbf{T} : g \mapsto \mathbf{T}(g) \in GL_n(\mathbb{C})$.

Definition

Zwei n-dimensionale Darstellungen $\mathbf{T}$ und $\tilde{\mathbf{T}}$ einer Gruppe G sind **äquivalent** ($\mathbf{T} \simeq \tilde{\mathbf{T}}$), wenn es eine invertierbare lineare Transformation $\mathbf{S} \in GL(V)$ gibt, so dass gilt:

$$\tilde{\mathbf{T}}(g) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}(g) \cdot \mathbf{S}^{-1}. \tag{50}$$

Betrachten wir zwei Basen in V: $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$, die durch die Matrix $(S_{ij}) = \mathbf{S} \in GL(V)$ ineinander transformiert werden:

$$\mathbf{S} \left| v_i \right\rangle = \left| \tilde{v}_i \right\rangle ,$$

dann werden zwei äquivalente Matrix-Darstellungen $\mathbf{T}(g), \tilde{\mathbf{T}}(g)$ definiert durch (Man achte auf die Indizes der Matrizen $T_{ji}(g)$, in dieser Form ist die Darstellungseigenschaft $\mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g') = \mathbf{T}(gg')$ sicher gestellt.):

$$\mathbf{T}(g) \left| v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} T_{ji}(g) \left| v_j \right\rangle , \quad \tilde{\mathbf{T}}(g) \left| \tilde{v}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_{ji}(g) \left| \tilde{v}_j \right\rangle , \tag{51}$$

denn offenbar gilt:

$$\mathbf{T}(g) \left| v_i \right\rangle = \left| w_i \right\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S}\mathbf{T}(g) \left| v_i \right\rangle = \mathbf{S} \left| w_i \right\rangle = \left| \tilde{w}_i \right\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S}\mathbf{T}(g)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} \left| v_i \right\rangle = \tilde{\mathbf{T}}(g) \left| \tilde{v}_i \right\rangle = \left| \tilde{w}_i \right\rangle$$

Beispiele von Darstellungen I

- Beispiel: Selbstdarstellungen: von Matrixgruppen $GL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C}), \dots$ sind n-dimensionale Darstellungen von sich selbst. Ebenso eine Gruppe von Operatoren über einen Vektorraum ist eine Darstellung von sich selbst.
- Beispiel: Betrachte die Gruppe $S_3 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_6\}$:

$$\sigma_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123), \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132),$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23), \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13), \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12).$$

Eine dreidimensionale Darstellung wird definiert durch Darstellungsmatrizen

$$\mathbf{T}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}(\sigma_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}(\sigma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}(\sigma_6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Dimension des Darstellungsraums ist genauso groß wie die Anzahl der zu permutierenden Elemente Elemente, diese Darstellung nennen wir die natürliche Darstellung. Die drei Objekte sind in diesem Fall die Basisvektoren: $v_1 = (1,0,0)^t$, $v_2 = (0,1,0)^t$, $v_3 = (0,0,1)^t$. Die Matrizen $\mathbf{T}(\sigma_j)$ permutieren diese Basisvektoren.

Unitäre und orthogonale Darstellung I

Definition

Für ein Skalarproduktraum V über $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) und eine Darstellung $\mathrm{G} \rightarrow \mathrm{GL(V)}$ mit $g \mapsto \mathbf{T}(g)$ ist eine **unitäre (orthogonale) Darstellung** gegeben, wenn gilt:

$$\langle \mathbf{T}(g)\psi | \mathbf{T}(g)\phi \rangle = \langle \psi|\phi \rangle, \quad \forall \psi, \phi \in V, \quad \forall g \in \mathrm{G}. \tag{52}$$

Beispiel: Betrachte die natürliche Darstellung der S_3, dann können die Darstellungsmatrizen, wie folgt dargestellt werden:

$$(\mathbf{T}(\sigma_i))_{\alpha\alpha'} = \delta_{\sigma_i(\alpha)\sigma_i(\alpha')}$$

Dann folgt mit beliebigen Vektoren aus dem Darstellungsraum:

$$|\psi\rangle = \sum_{\beta=1}^{3} \psi_\beta |v_\beta\rangle \quad \wedge \quad |\phi\rangle = \sum_{\beta=1}^{3} \phi_\beta |v_\beta\rangle, \quad \text{mit} \quad \psi_\beta, \phi_{\beta'} \in \mathbb{R}$$

$$\langle \mathbf{T}(\sigma_i)\psi | \mathbf{T}(\sigma_i)\phi \rangle = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta,\beta'=1}^{3} \mathbf{T}(\sigma_i)^t_{\alpha\beta} \psi_\beta \mathbf{T}(\sigma_i)_{\alpha\beta'} \phi_{\beta'} = \sum_{\beta,\beta'=1}^{3} \psi_\beta \phi_{\beta'} \sum_{\alpha=1}^{3} \delta_{\sigma_i(\beta)\sigma_i(\alpha)} \delta_{\sigma_i(\alpha)\sigma_i(\beta')}$$

Nun folgt mit:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \delta_{\sigma_i(\beta)\sigma_i(\alpha)} \delta_{\sigma_i(\alpha)\sigma_i(\beta')} = \delta_{\sigma_i(\beta)\sigma_i(\beta')} = \delta_{\beta\beta'},$$

dass gilt:

$$\langle \mathbf{T}(\sigma_i)\psi | \mathbf{T}(\sigma_i)\phi \rangle = \sum_{\beta,\beta'=1}^{3} \psi_\beta \phi_{\beta'} \delta_{\beta\beta'} = \sum_{\beta=1}^{3} \psi_\beta \phi_\beta = \langle \psi|\phi \rangle$$

Unitäre und orthogonale Darstellung II

Theorem

Eine endlichdimensionale Darstellung $\mathbf{T}$ *von* G *auf dem Darstellungsraum* V *ist äquivalent zu einer unitären Darstellung.*

Beweis: Zunächst definieren wir ein Skalarprodukt wie folgt:

$$(\psi|\phi) \doteq \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{h \in \mathrm{G}} \langle \mathbf{T}(h)\psi | \mathbf{T}(h)\phi \rangle. \tag{53}$$

Dies ist offenbar ein Skalarprodukt in V, wie man sich leicht überzeugt. Aus dieser Definition folgt für alle $h \in \mathrm{G}$:

$$(\mathbf{T}(g)\psi|\mathbf{T}(g)\phi) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{h \in \mathrm{G}} \langle \mathbf{T}(h)\mathbf{T}(g)\psi | \mathbf{T}(h)\mathbf{T}(g)\phi \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{h \in \mathrm{G}} \langle \mathbf{T}(hg)\psi | \mathbf{T}(hg)\phi \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{h' \in \mathrm{G}} \left\langle \mathbf{T}(h')\psi | \mathbf{T}(h')\phi \right\rangle = (\psi|\phi) \tag{54}$$

Damit ist die Darstellung $\mathbf{T}$ unitär bzgl. des Skalarproduktes $(\cdot|\cdot)$.
Nun muss noch gezeigt werden, dass $\mathbf{T}$ unitär bzgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot|\cdot \rangle$ ist. Dazu betrachten wir eine Orthonormalbasis $\{u_i\}$ in V bzgl. $(\cdot|\cdot)$ und eine Orthonormalbasis $\{v_i\}$ in V bzgl. $\langle \cdot|\cdot \rangle$. Dann existiert eine nichtsinguläre Transformation $\mathbf{S} : V \rightarrow V$ mit $\mathbf{S}|u_i\rangle = |v_i\rangle$. Drücken wir nun zwei Vektoren $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ in V in der Basis $\{u_i\}$ aus:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\dim V} \psi_i |u_i\rangle, \quad |\phi\rangle = \sum_{i=1}^{\dim V} \phi_i |u_i\rangle, \tag{55}$$

dann folgt:

$$\langle \mathbf{S}\psi | \mathbf{S}\phi \rangle \overset{(55)}{=} \sum_{i,j} \bar{\psi}_i \phi_j \langle \mathbf{S}u_i | \mathbf{S}u_j \rangle = \sum_{i,j} \bar{\psi}_i \phi_j \langle v_i | v_j \rangle = \sum_i \bar{\psi}_i \phi_i = (\psi|\phi). \tag{56}$$

Andererseits gilt:

$$\langle \mathbf{S}\mathbf{T}(g)\mathbf{S}^{-1}\psi | \mathbf{S}\mathbf{T}(g)\mathbf{S}^{-1}\phi \rangle \overset{(56)}{=} (\mathbf{T}(g)\mathbf{S}^{-1}\psi | \mathbf{T}(g)\mathbf{S}^{-1}\phi) \overset{(54)}{=} (\mathbf{S}^{-1}\psi | \mathbf{S}^{-1}\phi) \overset{(56)}{=} \langle \psi|\phi \rangle.$$

Unitäre und orthogonale Darstellung III

Dies bedeutet, dass die Darstellung $\tilde{\mathbf{T}}(g) = \mathbf{S}\mathbf{T}(g)\mathbf{S}^{-1}$ unitär ist in V bzgl. $\langle\cdot|\cdot\rangle$.
Beispiel: Schrödingergleichung: Betrachten wir den Hilbertraum $V = L_2$ der quadratintegrablen Funktionen. Die Schrödingergleichung lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{\Delta}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \qquad |\psi\rangle \in L_2, \tag{57}$$

wobei $V(x)$ ein Potential ist. Falls $V(x)$ invariant ist unter einer Gruppe, z.B. eine Rotationsinvarianz besitzt:

$$V(g \cdot x) = V(x), \quad \forall g \in G \subset O_3,$$

dann ist ein Homomorphismus gegeben durch:

$$[\mathbf{T}(g)\psi](x) \doteq \psi(g^{-1}x), \tag{58}$$

denn

$$[\mathbf{T}(g_1 \circ g_2)\psi](x) = \psi((g_1 \circ g_2)^{-1}x) = \psi(g_2^{-1} \circ g_1^{-1}x) = [\mathbf{T}(g_2)\psi](g_1^{-1}x) = [\mathbf{T}(g_1)\mathbf{T}(g_2)\psi](x)$$

Ist eine Lösung $\psi(x)$ von (57) gegeben, dann ist (58) ebenso eine Lösung für alle $g \in G \subset O_3$. Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\bar{\psi}(x)\psi(x) \\
&\overset{x'=gx}{=} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \underbrace{\left|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1',x_2',x_3')}\right|}_{=1} \bar{\psi}(g^{-1}x')\psi(g^{-1}x') \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x'\bar{\psi}(g^{-1}x')\psi(g^{-1}x') < \infty,
\end{aligned}$$

sowie ganz analog:

$$\langle[\mathbf{T}(g)\psi_1](x)|[\mathbf{T}(g)\psi_2](x)\rangle = \langle\psi_1(x)|\psi_2(x)\rangle, \qquad \forall g \in G.$$

Reduzible und irreduzible Darstellungen V5 - 3004 I

Wir betrachten endlichdimensionale Darstellungen einer Gruppe G endlicher Ordnung in einem reellen oder komplexen Vektorraum V.

Definition

Einen Unterraum $W \subset V$ nennen wir **invariant** unter einer Darstellung $\mathbf{T}$, wenn

$$\mathbf{T}(g)\,|w\rangle \in W, \quad \forall g \in G, |w\rangle \in W$$

ist.

Ist W invariant unter $\mathbf{T}$, so können wir eine Darstellung auf $W \subset V$ definieren durch:

$$\tilde{\mathbf{T}}(g)\,|w\rangle = \mathbf{T}(g)\,|w\rangle, \quad |w\rangle \in W.$$

Diese Darstellung ist die Einschränkung von $\mathbf{T}$ auf W. Ist $\mathbf{T}$ unitär, so ist es auch $\tilde{\mathbf{T}}$.

Definition

Eine Darstellung $\mathbf{T}$ ist **reduzibel**, wenn es einen echten invarianten Unterraum $W \subsetneq V$ gibt. Ansonsten nennen wir $\mathbf{T}$ **irreduzibel**.

Eine Darstellung ist irreduzibel, wenn die einzigen invarianten Unterräume von V, V selbst ist und der triviale Nullraum. Der Nullraum wird im folgenden immer vernachlässigt.

Reduzible und irreduzible Darstellungen   V6 - 3004   II

Theorem (Reduzible und irreduzible Darstellungen)

Ist **T** *eine reduzible unitäre Darstellung von* G *auf* V*, und* $\mathrm{W} \subsetneq \mathrm{V}$ *ein echter invarianter Unterraum von* V*, dann ist der orthogonale Raum* $\mathrm{W}^{\perp}$ *ebenfalls ein echter invarianter Unterraum von* V*. Damit ist* **T** *die direkte Summe* $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathrm{W}} \oplus \mathbf{T}_{\mathrm{W}^{\perp}}$*. Die Darstellungen* $\mathbf{T}_{\mathrm{W}}, \mathbf{T}_{\mathrm{W}^{\perp}}$ *sind die Einschränkungen von* **T** *auf* W *bzw.* $\mathrm{W}^{\perp}$*.*

Beweis: Hierzu ist zu zeigen, dass $\mathbf{T}(g)|w^{\perp}\rangle \in \mathrm{W}^{\perp}, \ \forall g \in \mathrm{G}, \ |w^{\perp}\rangle \in \mathrm{W}^{\perp}$. Betrachten wir also ein $|w\rangle \in \mathrm{W}$:

$$\langle \mathbf{T}(g)w^{\perp}|w\rangle = \langle \mathbf{T}(g^{-1})\mathbf{T}(g)w^{\perp}|\mathbf{T}(g^{-1})w\rangle = \langle w^{\perp}|\mathbf{T}(g^{-1})w\rangle = 0,$$

da $\mathbf{T}(g^{-1})\,|w\rangle \in \mathrm{W}$ ist. Das bedeutet aber wiederum $\mathbf{T}(g)|w^{\perp}\rangle \in \mathrm{W}^{\perp}$.
Beispiel: Ist eine Matrixdarstellung gegeben mit einem invarianten Unterraum $\mathrm{W} \subsetneq \mathrm{V}$ der Dimension k wobei gilt: $1 \leq k < n$, dann kann die Matrix $\mathbf{T} = T_{ij}$ geschrieben werden als:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}' \end{pmatrix},$$

wobei $\dim(T') = k$ und $\dim(T'') = n - k$ ist.
Jede reduzible Darstellung kann somit aufgebaut werden aus irreduziblen Darstellungen, indem jede reduzible Darstellung immer weiter reduziert wird, bis nur noch irreduzible Darstellungen vorhanden sind. Dabei kann es vorkommen, dass einige der so entstandenen irreduziblen Darstellungen äquivalent sind. Man kann damit eine reduzible Darstellung schreiben als:

$$\mathbf{T} = \bigoplus_i a_i \mathbf{T}_i, \tag{59}$$

wobei die **Multiplizitäten** a_i die Anzahl der äquivalenten Darstellungen $\mathbf{T}_i$ angibt. Eine solche Zerlegung ist natürlich nicht eindeutig. Jedoch sind die Multiplizitäten a_i eindeutig bestimmt.

Reduzible und irreduzible Darstellungen   V7 - 3004   III

Definition

Eine Darstellung **T** die in irreduzible Darstellungen der Form (59) zerfällt nennen wir **vollreduzibel**.

Beispiel: Betrachte die Kopplung zweir Spins: $\vec{\mathbf{S}}_1$ und $\vec{\mathbf{S}}_2$ mit Spin s_1 und s_2 zu einem Gesamtspin:

$$\mathbf{S}^{\alpha} = \mathbf{S}_1^{\alpha} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{S}_2^{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad s = |s_1 - s_2|, |s_1 - s_2| + 1, \ldots, s_1 + s_2$$

Dann zerfällt der $(2S_1 + 1) \cdot (2S_2 + 1)$-dimensionale Tensorproduktraum in die direkte Summe:

$$\mathbf{S}^{\alpha} = \bigoplus_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \mathbf{s}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \Big(\; [2|s_1 - s_2| + 1] \; \Big) & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Big(\; [2|s_1 - s_2| + 3] \; \Big) & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \Big(\; [2(s_1 + s_2) + 1] \; \Big) \end{pmatrix}$$

Die Gesamtspindarstellung ist eine vollreduzible Darstellung, die in $(2\max\{s_2, s_1\} + 1)$ irreduzible Darstellungen der Dimensionen $2|s_1 - s_2| + 1, 2|s_1 - s_2| + 3, \ldots, 2(s_1 + s_2) + 1$ zerfällt. Die Multiplizität ist jeweils gleich eins. Dies wird eingehend bei der Darstellung der SU_2 diskutiert werden. Es gilt:

$$\dim \mathbf{S}^{\alpha} = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) = \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} (2s + 1)$$

Das Hauptproblem in der Darstellungstheorie besteht darin für eine gegebene Darstellung **T** einer Gruppe G alle nicht äquivalenten irreduziblen Darstellungen zu konstruieren, sowohl theoretisch als auch praktisch.

Irreduzible Darstellungen

Theorem

Seien $\mathbf{T}$ *und* $\tilde{\mathbf{T}}$ *zwei irreduzible Darstellungen der Gruppe* G *auf den endlichdimensionalen Vektorräumen* V *und* V′*, sowie eine lineare (von Null verschiedene) Transformation* $\mathbf{A} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$*, so dass gilt:*

$$\tilde{\mathbf{T}}(g)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{T}(g), \quad \forall g \in G. \tag{60}$$

Dann ist $\mathbf{A}$ *eine nichtsinguläre Transformation aus* $\mathrm{GL}(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$*, mit der Eigenschaft* $\mathbf{T} \simeq \tilde{\mathbf{T}}$*.*

Beweis: Betrachten wir den Nullraum $\mathcal{K}(\mathbf{A})$ und den Bildraum $\mathcal{B}(\mathbf{A})$ von $\mathbf{A}$:

$$\mathcal{K}(\mathbf{A}) = \{|v\rangle \in \mathrm{V} : \ \mathbf{A}\,|v\rangle = \mathbf{0}\}, \quad \mathcal{B}(\mathbf{A}) = \{|v'\rangle \in \mathrm{V}' : \ |v'\rangle = \mathbf{A}\,|v\rangle \ \text{ für } \ |v\rangle \in \mathrm{V}\}. \tag{61}$$

Der Unterraum $\mathcal{K}(\mathbf{A})$ von V ist invariant unter $\mathbf{T}$, da:

$$\mathbf{A}\mathbf{T}(g)\,|v\rangle = \tilde{\mathbf{T}}(g)\mathbf{A}\,|v\rangle = \mathbf{0}, \quad \forall g \in \mathrm{G}, \ |v\rangle \in \mathrm{V}. \tag{62}$$

Da angenommen ist, dass $\mathbf{T}$ irreduzibel ist, gilt entweder $\mathcal{K}(\mathbf{A})$ ist V selbst oder $\mathbf{0}$. Ersteres bedeutet $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, was nach Voraussetzung ausgeschlossen wurde, also ist $\mathcal{K}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.
Der Unterraum $\mathcal{B}(\mathbf{A}) \subset \mathrm{V}'$ ist invariant unter $\tilde{\mathbf{T}}$, da gilt:

$$\tilde{\mathbf{T}}(g)|v'\rangle = \tilde{\mathbf{T}}(g)\mathbf{A}\,|v\rangle = \mathbf{A}\mathbf{T}(g)\,|v\rangle \ \in \mathcal{B}(\mathbf{A}), \ \forall\,|v\rangle \in \mathrm{V}. \tag{63}$$

Da $\tilde{\mathbf{T}}$ irreduzibel ist, ist entweder $\mathcal{B}(\mathbf{A})$ gleich V′ oder $\mathbf{0}$. Ist $\mathcal{B}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ dann gilt $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ was ausgeschlossen ist. Also ist $\mathcal{B}(\mathbf{A}) = \mathrm{V}'$, was wiederum bedeutet, dass $\mathbf{T} \simeq \tilde{\mathbf{T}}$.

Lemma

Seien $\mathbf{T}$ *und* $\tilde{\mathbf{T}}$ *zwei nicht äquivalente endlichdimensionale irreduzible Darstellungen der Gruppe* G *und* $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ *mit der Eigenschaft:* $\mathbf{T}(g)\mathbf{A} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{T}}(g)$, $\forall g \in \mathrm{G}$*, dann gilt:* $\mathbf{A} = \mathbf{0}$*.*

Beispiel zur Irreduziblität von Darstellungen

Beispiel: Wir betrachten das Beispiel der natürlichen Darstellung der S_3 mit der Bezeichnung: $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}(\sigma_i)$ und $\mathbf{T}_1 = \mathbf{1}$:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist eine dreidimensionale Darstellung, und wenn es also einen invarianten Unterraum geben soll, dann muss es einen eindimensionalen Unterraum geben für alle $\mathbf{T}_i$. Alle Darstellungsmatrizen besitzen den Eigenwert 1. Der Invarinate Unterraum hierzu ist offenbar gegeben durch:

$$\mathcal{E}_1 \equiv \{|a\rangle \equiv (a, a, a)^t : \ a \in \mathbb{R}\} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{T}_i\,|a\rangle = |a\rangle\,, \quad \forall i$$

Der dazu orthogonale Unterraum ist somit gegeben durch:

$$\mathcal{E}_1^{\perp} \equiv \{(b, c, -(b+c))^t : \ b, c \in \mathbb{R}\}$$

Hieraus lassen sich drei orthonormierte Basisvektoren bilden und eine Basistransformationsmatrix $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{\mathbf{T}}_i = \mathbf{S}\mathbf{T}_i\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_i^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{(1)} \oplus \mathbf{T}^{(3)}$$

mit einer zweidimensionalen Darstellung $\mathbf{T}_i^{(3)}$ der S_3 und der trivialen Einsdarstellung. Damit ist also die dreidimensionale Darstellung $\mathbf{T}$ eine reduzible Darstellung. Eine andere dreidimensionale reduzible nicht äquivalente Darstellung ist gegeben durch:

$$\check{\mathbf{T}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i^{(2)} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_i^{(3)} \end{pmatrix}$$

mit der eindimensionalen Darstellung über das $\mathrm{sgn}(\sigma_i)$:

$$\mathbf{T}_1^{(2)} = \mathbf{T}_2^{(2)} = \mathbf{T}_3^{(2)} = +1 \qquad \wedge \qquad \mathbf{T}_4^{(2)} = \mathbf{T}_5^{(2)} = \mathbf{T}_6^{(2)} = -1$$

Schursches Lemma

Theorem (Schursches Lemma)

Sei $\mathbf{T}$ *eine Darstellung von* G *auf dem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum* V. *Dann ist* $\mathbf{T}$ *irreduzibel genau dann, wenn die einzigen Transformationen* $\mathbf{A} \in \mathrm{GL(V)}$ *für die gilt:*

$$\mathbf{T}(g)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{T}(g), \quad \forall g \in \mathrm{G}, \tag{64}$$

lauten $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{1}$ *mit* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis:

- Betrachten wir zunächst den Fall, dass Glg. (64) gilt und das $\mathbf{T}$ irreduzibel ist, dann müssen wir zeigen dass $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{1}$ ist. Lineare Operatoren auf endlichdimensionalen Vektorräumen besitzen wenigstens einen Eigenwert. (Im Gegensatz zum Fall der reellen Vektorräumen). Nun sei λ der Eigenwert des Operators $\mathbf{A}$, der Eigenraum sei:

$$\mathcal{E}_\lambda \equiv \{|v\rangle \in \mathrm{V} : \ \mathbf{A}|v\rangle = \lambda |v\rangle\} \ \subset \mathrm{V}. \tag{65}$$

Dieser Eigenraum ist invariant unter der Darstellung $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{T}(g)|v\rangle = \mathbf{T}(g)\mathbf{A}|v\rangle = \lambda\mathbf{T}(g)|v\rangle\,, \ \forall g \in G \quad |v\rangle \in \mathcal{E}_\lambda\,, \tag{66}$$

also: $\mathbf{T}(g)|v\rangle \equiv |v'\rangle \in \mathcal{E}_\lambda$. Da $\mathbf{T}$ aber nun irreduzibel ist, muss $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{V}$ gelten, da ansonsten $\mathbf{T}$ einen echten invarianten Unterraum besitzen würde. Daraus folgt dann $\mathbf{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle\,, \ \forall |v\rangle \in \mathrm{V}$ womit $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{1}$ folgt.

Schursches Lemma

- Sei nun $\mathbf{T}$ reduzible. Wir zeigen, dass es einen Operator gibt, der Gleichung (64) erfüllt aber ungleich $\lambda\mathbf{1}$ ist.

Die Darstellung soll reduzibel sein, deswegen exisitieren aufgrund des Theorems *Reduzible und irreduzibel Darstellungen* echte invariante Unterräume derart, dass gilt: $\mathrm{W}, \mathrm{W}^\perp \subsetneq \mathrm{V}$ mit $\mathrm{V} = \mathrm{W} \oplus \mathrm{W}^\perp$. Jeder Vektor $|v\rangle \in \mathrm{V}$ lässt sich somit zerlegen in $|v\rangle = |w\rangle + |w^\perp\rangle$. Für den Projektionsoperator auf den Unterraum W sei $\mathbf{P}_\mathrm{W}$ ($\mathbf{P}_\mathrm{W}|v\rangle = |w\rangle \in \mathrm{W}, \ \forall |v\rangle \in \mathrm{V}$) gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(g)\mathbf{P}_\mathrm{W}|v\rangle &= \mathbf{P}_\mathrm{W}\mathbf{T}(g)|v\rangle \\
&= \mathbf{P}_\mathrm{W}\mathbf{T}(g)(|w\rangle + |w^\perp\rangle) \\
&= \mathbf{P}_\mathrm{W}\underbrace{\mathbf{T}(g)|w\rangle}_{\in\mathrm{W}} + \mathbf{P}_\mathrm{W}\underbrace{\mathbf{T}(g)|w^\perp\rangle}_{\in\mathrm{W}^\perp} \\
&= \mathbf{P}_\mathrm{W}\mathbf{T}(g)|w\rangle
\end{aligned}$$

Der Operator $\mathbf{P}_\mathrm{W}$ ist offenbar nicht proportional zur Identität. Deswegen kann $\mathbf{T}$ nicht reduzibel sein.

Das Schursche Lemma kann nach Wahl einer Basis direkt auf Matrix Darstellungen umgeschrieben werden.

Lemma

Es seien zwei Matrix-Darstellungen $\mathbf{T} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *und* $\tilde{\mathbf{T}} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ *einer Gruppe* G *gegeben, so dass gilt:*

$$\tilde{\mathbf{T}}(g)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{T}(g), \quad \forall g \in \mathrm{G}. \tag{67}$$

Sind $\mathbf{T}$ *und* $\tilde{\mathbf{T}}$ *nicht äquivalent, dann ist* $\mathbf{A} = \mathbf{0}$*; ist* $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}}$*, dann gilt:* $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{1}$.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass zum Beweis des Schurschen Lemmas lediglich die Irreduzibilität und die Endlichdimensionalität eines komplexen Vektorraumes gebraucht wurde; nicht jedoch die Homomorphismus Eigenschaft oder die Endlichkeit der Gruppenordnung.

Orthogonalitätsrelation I

Theorem (Orthogonalitätsrelation)

Es seien zwei irreduzible unitäre Matrix-Darstellungen $\mathbf{T}^{(a)} \in \mathrm{GL}_{n_a}(\mathbb{C})$ *und* $\mathbf{T}^{(b)} \in \mathrm{GL}_{n_b}(\mathbb{C})$ *einer Gruppe* G *gegeben, dann gilt folgende* **Orthogonalitätsrelation***:*

$$\sum_{g \in \mathrm{G}} T^{(a)}_{ij}(g) T^{(b)}_{nm}(g^{-1}) = \sum_{g \in \mathrm{G}} T^{(a)}_{ij}(g) \bar{T}^{(b)}_{mn}(g) = \frac{|\mathrm{G}|}{n_a} \delta_{ab} \delta_{im} \delta_{jn} \tag{68}$$

Beweis: Betrachten wir eine beliebige $n_a \times n_b$ Matrix $\mathbf{B}$ und definieren:

$$\mathbf{A} \doteq \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \mathbf{T}^{(a)}(g) \mathbf{B} \mathbf{T}^{(b)}(g^{-1}). \tag{69}$$

Nun betrachten wir für ein beliebiges $h \in \mathrm{G}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{(a)}(h)\mathbf{A} &= \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \mathbf{T}^{(a)}(h) \mathbf{T}^{(a)}(g) \mathbf{B} \mathbf{T}^{(b)}(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \mathbf{T}^{(a)}(hg) \mathbf{B} \mathbf{T}^{(b)}(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \mathbf{T}^{(a)}(hg) \mathbf{B} \mathbf{T}^{(b)}((hg)^{-1}) \mathbf{T}^{(b)}(h) \\
&= \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g' \in \mathrm{G}} \mathbf{T}^{(a)}(g') \mathbf{B} \mathbf{T}^{(b)}(g'^{-1}) \mathbf{T}^{(b)}(h) \\
&= \mathbf{A} \mathbf{T}^{(b)}(h)
\end{aligned}$$

Orthogonalitätsrelation II

Damit gilt aber nach dem Schurschen Lemma, dass $\mathbf{A} = \lambda(a, \mathbf{B}) \delta_{ab} \mathbf{1}$, für ein $\lambda = \lambda(a, \mathbf{B}) \in \mathbb{C}$. Nun diskutieren wir spezielle Matrizen:

$$\mathbf{B}^{pq} \equiv B^{pq}_{kl} \doteq \begin{cases} 1 & : k = p,\ l = q,\ 1 \le k \le n_a,\ 1 \le l \le n_b \\ 0 & : \text{sonst}, \end{cases} \tag{70}$$

was unter Beachtung der Dimensionen n_a und n_b geschrieben werden kann als $B^{pq}_{kl} = \delta_{pk} \delta_{ql}$. Setzen wir dies in (69) ein:

$$\begin{aligned}
\lambda(a, \mathbf{B}^{pq}) \delta_{ab} \delta_{ij} |\mathrm{G}| &= \sum_{g \in \mathrm{G}} \left(\mathbf{T}^{(a)}(g) \mathbf{B}^{pq} \mathbf{T}^{(b)}(g^{-1}) \right)_{ij} \\
&= \sum_{g \in \mathrm{G}} \sum_{k=1}^{n_a} \sum_{l=1}^{n_b} T^{(a)}_{ik}(g) \delta_{kp} \delta_{lq} T^{(b)}_{lj}(g^{-1}) \\
&= \sum_{g \in \mathrm{G}} T^{(a)}_{ip}(g) T^{(b)}_{qj}(g^{-1})
\end{aligned} \tag{71}$$

Nun bestimmen wir $\lambda(a, \mathbf{B}^{pq})$, indem wir $a = b$ betrachten und $i = j$, mit anschließender Summation über i:

$$\lambda(a, \mathbf{B}^{pq}) n_a = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \sum_{i=1}^{n_a} T^{(a)}_{ip}(g) T^{(a)}_{qi}(g^{-1}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} (\mathbf{T}^{(a)}(g^{-1}) \mathbf{T}^{(a)}(g))_{pq} = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} T^{(a)}_{pq}(g^{-1} g) = \delta_{pq}$$

also $\lambda(a, \mathbf{B}^{pq}) = \delta_{pq} / n_a$. Dies setzen wir in Gleichung (71) ein und erhalten die Aussage (68), wenn wir noch beachten, dass für eine unitäre Darstellung gilt: $T_{pq}(g^{-1}) = T^{-1}_{pq}(g) = \bar{T}_{qp}(g)$.

Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist, dass keine detailierte Gruppenstruktur zum Beweis benötigt wurde.

Gruppen Charaktere I

Definition

Sei $\mathbf{T}$ eine n-dimensionale Matrix-Darstellung einer Gruppe G endlicher Ordnung auf einem Vektorraum V. Den **Charakter der Darstellung** $\chi^{(\mathbf{T})}$ definieren wir als:

$$\chi^{\mathbf{T}}(g) \equiv \chi(g) \doteq \mathrm{Sp}\ \mathbf{T}(g) \equiv \sum_{i=1}^{n=\dim V} T_{ii}(g), \quad \forall g \in G. \tag{72}$$

Den Charakter einer irreduziblen Darstellung nennen wir **einfachen Charakter**, den einer reduziblen Darstellung **zusammengesetzt Charakter**.

Lemma

Es seien Darstellung $\mathbf{T}$ *und* $\tilde{\mathbf{T}}$ *mit Charakteren* χ *und* $\tilde{\chi}$ *der Gruppe* G *gegeben, dann gilt:*

1. $$\chi(e) = n, \qquad \mathbf{T} \in GL_n \tag{73}$$
2. $$\chi(g) = \tilde{\chi}(g), \qquad \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S},\ \mathbf{S} \in GL(V) \tag{74}$$
3. $$\chi(g^{-1}) = \bar{\chi}(g), \qquad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{\dagger} \tag{75}$$
4. $$\chi(hgh^{-1}) = \chi(g), \qquad \forall g, h \in G \tag{76}$$

Gruppen Charaktere II

Die Voraussetzung der Unitarität der Darstellung für Eigenschaft 3. ist für endlichdimensionale Darstellungen überflüssig, weil dort die Äquivalenz zu einer unitären Darstellung gegeben ist.
Beweis:

1. $\chi(e) = \mathrm{Sp}\ \mathbf{T}(e) = \mathrm{Sp}\ \mathbf{1} = n$
2. $\tilde{\chi}(g) = \mathrm{Sp}\ \tilde{\mathbf{T}}(g) = \mathrm{Sp}\ (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}) = \mathrm{Sp}\ (\mathbf{T}) = \chi(g)$
3. $\chi(g^{-1}) = \mathrm{Sp}\ \mathbf{T}(g^{-1}) = \mathrm{Sp}\ \bar{\mathbf{T}}^{t}(g) = \mathrm{Sp}\ \bar{\mathbf{T}}(g) = \bar{\chi}(g)$
4. $\chi(hgh^{-1}) = \mathrm{Sp}\ \mathbf{T}(hgh^{-1}) = \mathrm{Sp}\ \mathbf{T}(h)\mathbf{T}(g)\mathbf{T}(h^{-1}) = \mathrm{Sp}\ \mathbf{T}(g) = \chi(g)$

Definition (Skalarprodukt für Charaktere)

Es seien zwei Darstellungen $\mathbf{T}^{(a)}$ und $\mathbf{T}^{(b)}$ mit Charaktere $\chi^{(a)}$ und $\chi^{(b)}$ gegeben. Wir definieren ein **inneres Produkt** für Charaktere wie folgt:

$$(\chi^{(a)}|\chi^{(b)}) \doteq \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{(a)}(g)\chi^{(b)}(g^{-1}). \tag{77}$$

Dies ist ein inneres Produkt, denn es handelt sich um eine endlichdimensionale Darstellung, deswegen können wir ohne Einschränkung eine unitäre Darstellung benutzen, so dass folgt:

1. $(\chi^{(a)}|\chi^{(a)}) = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi^{(a)}(g)\chi^{(a)}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi^{(a)}(g)\bar{\chi}^{(a)}(g) \geq 0.$
2. $(\chi^{(a)}|\lambda\chi^{(b)}) = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi^{(a)}(g)\lambda\chi^{(b)}(g^{-1}) = \lambda(\chi^{(a)}|\chi^{(b)}), \quad \lambda \in \mathbb{C}$
3. $(\chi^{(a)}|\chi^{(b)} + \chi^{(c)}) = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi^{(a)}(g)(\chi^{(b)}(g^{-1}) + \chi^{(c)}(g^{-1})) = (\chi^{(a)}|\chi^{(b)}) + (\chi^{(a)}|\chi^{(c)})$
4. $\overline{(\chi^{(a)}|\chi^{(b)})} = \frac{1}{|G|}\sum_g \bar{\chi}^{(a)}(g)\bar{\chi}^{(b)}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi^{(a)}(g^{-1})\chi^{(b)}(g) = (\chi^{(b)}|\chi^{(a)})$

Orthogonalitätsrelationen für Charaktere

Die *Orthogonalitätsrelation* (68) ergibt als unmittelbare Folgerung für die Charaktere:

Lemma (Erste Orthogonalitätsrelation)

Es seinen zwei irreduzible Matrix-Darstellungen $\mathbf{T}^{(a)} \in \mathrm{GL}_{n_a}(\mathbb{C})$ *und* $\mathbf{T}^{(b)} \in \mathrm{GL}_{n_b}(\mathbb{C})$ *einer Gruppe* G *gegeben, dann gilt folgende* **Orthogonalitätsrelation für die Charaktere***:*

1. $$\frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\chi^{(a)}(g)\chi^{(b)}(g^{-1}) = \delta_{ab}. \tag{78}$$
2. $$(\chi^{(a)}|\chi^{(b)}) = \delta_{ab}. \tag{79}$$

Beweis:

1. Wir gehen aus von Gleichung (68), setzen $i = j$ und $n = m$ und summieren anschließend über i und m:

$$\sum_{g\in\mathrm{G}}\mathrm{Sp}\ \mathbf{T}^{(a)}(g)\mathrm{Sp}\ \mathbf{T}^{(b)}(g^{-1}) = \sum_{i=1}^{n_a}\sum_{j=1}^{n_b}\sum_{g\in\mathrm{G}} T_{ii}^{(a)}(g)T_{jj}^{(b)}(g^{-1}) = \frac{|\mathrm{G}|}{n_a}\sum_{i=1}^{n_a}\sum_{j=1}^{n_b}\delta_{ab}\delta_{ij}\delta_{ij} = |\mathrm{G}|\delta_{ab}$$

2. Die zweite Gleichung folgt aus der ersten und der Definition (79) zusammen mit der Eigenschaft, dass jede Darstellung äquivalent ist zu einer unitären Darstellung.

Orthogonalitätsrelationen für Charaktere

Lemma

Betrachte eine irreduzible Matrix-Darstellung $\mathbf{T} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*, dann gilt:*

$$\frac{n}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\chi(hgh'g^{-1}) = \chi(h)\chi(h'), \qquad \forall\ h, h' \in \mathrm{G} \tag{80}$$

Beweis: Wir gehen aus von Gleichung (68) mit $n = n_a = n_b$ und multiplizieren mit einer beliebigen $n_a \times n_a$-Matrix M_{jn}:

$$\frac{n_a}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\sum_{j=1}^{n_a}\sum_{n=1}^{n_a} T_{ij}^{(a)}(g)M_{jn}T_{nm}^{(a)}(g^{-1}) = \sum_{j=1}^{n_a}\sum_{n=1}^{n_a}\delta_{im}\delta_{jn}M_{jn} \tag{81}$$

daraus folgt:

$$\frac{n_a}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} T^{(a)}(g)\mathbf{M}\mathbf{T}^{(a)}(g^{-1}) = \mathbf{1}\ \mathrm{Sp}\ \mathbf{M} \tag{82}$$

wählt man nun speziell $\mathbf{M} = \mathbf{T}^{(a)}(h)$ und multipliziert mit $\mathbf{T}^{(a)}(h')$, so folgt:

$$\frac{n_a}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\mathbf{T}^{(a)}(h')T^{(a)}(g)\mathbf{T}^{(a)}(h)\mathbf{T}^{(a)}(g^{-1}) = \mathbf{T}^{(a)}(h')\ \mathrm{Sp}\ \mathbf{T}^{(a)}(h)$$

nach Spurbildung folgt zusammen mit der Darstellungseigenschaft:

$$\frac{n_a}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\mathrm{Sp}\ \mathbf{T}^{(a)}(h'ghg^{-1}) = \frac{n_a}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\chi^{(a)}(h'ghg^{-1}) = \mathrm{Sp}\ \mathbf{T}^{(a)}(h')\ \mathrm{Sp}\ \mathbf{T}^{(a)}(h) = \chi^{(a)}(h')\chi^{(a)}(h)$$

Charakter einer vollreduziblen und irreduziblen Darstellung I

Lemma

Eine vollreduzible Darstellung $\mathbf{T}(g)$ *zerfalle in A irreduzible Darstellungen* $\mathbf{T}^{(a)}$ *in der Form:*

$$\mathbf{T}(g) = \bigoplus_{a=1}^{A} \alpha_a \mathbf{T}^{(a)}(g), \qquad \forall g \in \mathrm{G}, \tag{83}$$

mit den Vielfachheiten $\alpha_a \in \mathbb{N}$*, dann gilt für den Charakter* $\chi(g)$*:*

$$\chi(g) = \sum_{a=1}^{A} \alpha_a \chi^{(a)}(g), \qquad \forall g \in \mathrm{G} \qquad \wedge \qquad \alpha_a = (\chi^{(a)}|\chi). \tag{84}$$

Beweis: Der erste Teil der Aussage ist unmittelbar klar und für die Vielfachheit gilt:

$$(\chi^{(a')}|\chi) \overset{(84)}{=} \sum_{a=1}^{A} \alpha_a (\chi^{(a')}|\chi^{(a)}) \overset{(79)}{=} \sum_{a=1}^{A} \alpha_a \delta_{aa'} = \alpha_{a'}, \qquad a' = 1, 2, .., A$$

Lemma

Die Darstellung $\mathbf{T}(g)$ *von G mit Charakter* $\chi(g)$*, ist genau dann irreduzible, wenn gilt* $(\chi|\chi) = 1$*.*

Beweis:

$$(\chi|\chi) \overset{(84)}{=} \sum_{a=1}^{A}\sum_{a'=1}^{A} \alpha_a \alpha_{a'} (\chi^{(a)}|\chi^{(a')}) \overset{(79)}{=} \sum_{a=1}^{A}\sum_{a'=1}^{A} \alpha_a \alpha_{a'} \delta_{aa'} = \sum_{a=1}^{A} \alpha_a^2$$

Die Darstellung ist genau dann irreduzible, wenn ein $\alpha_a = 1$ und alle anderen Vielfachheiten gleich Null sind.

Charaktere in Konjugationsklassen I

Lemma

Der Charaktere $\chi^{(a)}(g)$ *einer Darstellung* $\mathbf{T}^{(a)}(g)$ *ist auf einer Konjugationsklasse*

$$\mathrm{H}_i \doteq \mathrm{G} \bullet h_i = \{g h_i g^{-1} | g \in \mathrm{G}\}, \quad i = 1, ..., M$$

konstant und wir bezeichnen ihn mit

$$\chi_i^{(a)} \doteq \chi^{(a)}(g) \quad \forall g \in \mathrm{G} \bullet h_i, \ i = 1, ..., M, \tag{85}$$

dabei sei die Anzahl der verschiedenen Klassen mit M bezeichnet und $m_i = |\mathrm{H}_i|$ *die Anzahl der Gruppenelemente in einer Konjugationsklasse, dann gilt:*

$$(\chi^{(a)}|\chi^{(b)}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{i=1}^{M} m_i \chi_i^{(a)} \bar{\chi}_i^{(b)} \qquad \mathit{mit} \qquad \sum_{i=1}^{M} m_i = |\mathrm{G}| \tag{86}$$

Sind die Darstellungen $\chi^{(a)}$ *und* $\chi^{(b)}$ *irreduzibel, so folgt:*

$$\frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{i=1}^{M} m_i \chi_i^{(a)} \bar{\chi}_i^{(b)} = \delta_{ab} \tag{87}$$

Beweis: Die Beweise sind trivial und folgen unmittelbar aus (76) und (77).

Beispiele und Anwendungen I

Beispiel: Betrachten wir die Symmetrische Gruppe S_3 und die ein- , zwei- und dreidimensionale Darstellungen:

$$\mathbf{T}_1^{(1)} = \mathbf{T}_2^{(1)} = \mathbf{T}_3^{(1)} = +1 \qquad \wedge \qquad \mathbf{T}_4^{(2)} = \mathbf{T}_5^{(2)} = \mathbf{T}_6^{(2)} = -1$$

$$\mathbf{T}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_3^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_4^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_5^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_6^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_3^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_4^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_5^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_6^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Charaktere dieser Darstellungen sind in der folgenden Tabelle angegeben, dabei ist zu beachten:

$$\sigma_2^{-1} = \sigma_3 \qquad \wedge \qquad \sigma_i^{-1} = \sigma_i, \;\; i = 4, 5, 6$$

$\chi^{(a)}(g)$	e	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	$(\chi^{(a)}\|\chi^{(a)})$
$\chi^{(1)}(g)$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}(g)$	1	1	1	-1	-1	-1	1
$\chi^{(3)}(g)$	2	-1	-1	0	0	0	1
$\chi^{(4)}(g)$	3	0	0	1	1	1	2

Daraus folgt, dass die $\mathbf{T}^{(1)}$, $\mathbf{T}^{(2)}$ und $\mathbf{T}^{(3)}$ irreduzibel sind und $\mathbf{T}^{(4)}$ reduzibel ist. Die Darstellung $\mathbf{T}^{(4)}$ zerfällt in eine ein- und zwei-dimensionale Darstellung: $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{(1)} \oplus \mathbf{T}^{(3)} = \mathbf{1}_1 \oplus \mathbf{T}^{(3)}$. Dies klärt nun den Sachverhalt auf, dass $2 = (\chi^{(4)}|\chi^{(4)}) = (\chi^{(1)}|\chi^{(1)}) + (\chi^{(3)}|\chi^{(3)})$ gilt.
Desweiteren ist für die beiden irreduziblen Darstellungen leicht zu verifizieren: $(\chi^{(1)}|\chi^{(2)}) = (\chi^{(1)}|\chi^{(3)}) = (\chi^{(2)}|\chi^{(3)}) = 0$.

Gruppenring I

Definition (Gruppenring)

Es sei eine endliche Gruppe G gegeben, dann definieren wir den **Gruppenring** über:

$$R_{\mathrm{G}} \doteq \{x \equiv \sum_{g \in \mathrm{G}} x_g \cdot g | x_g \in \mathbb{C}\} \tag{88}$$

Dies ist ein Vektorraum für den gilt:

1. $$\mathbf{0} \doteq \sum_{g \in \mathrm{G}} 0 \cdot g \qquad \wedge \qquad 1 \cdot g \doteq g \tag{89}$$
2. $$x + y \equiv \sum_{g \in \mathrm{G}} x_g \cdot g + \sum_{g \in \mathrm{G}} y_g \cdot g \doteq \sum_{g \in \mathrm{G}} [x_g + y_g] \cdot g \tag{90}$$
3. $$\alpha x \equiv \alpha \sum_{g \in \mathrm{G}} x_g \cdot g \doteq \sum_{g \in \mathrm{G}} \alpha x_g \cdot g, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \tag{91}$$

Die Elemente g bilden damit eine natürliche Basis von R_{G}.

Gruppenalgebra und die reguläre Darstellung I

Definition (Gruppenalgebra)

Zusätzlich ist eine Algebrastruktur definiert über:

$$x \circ y \equiv xy \doteq \sum_{g,h \in \mathrm{G}} x_g y_h \cdot gh = \sum_{k \in \mathrm{G}} (xy)_k \cdot k, \qquad x, y \in R_{\mathrm{G}} \tag{92}$$

mit der Definition:

$$(xy)_k \doteq \sum_{h \in \mathrm{G}} x_{kh^{-1}} y_h = \sum_{h \in \mathrm{G}} x_h y_{h^{-1}k} \tag{93}$$

Die Algebra-Eigenschaften sind leicht überprüft. Das Produkt $(xy)_k$ nennt man auch das Faltungsprodukt.

Definition (Reguläre Darstellung)

Die **links (rechts) reguläre** Darstellung: $\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(R_{\mathrm{G}})$ ist definiert über:

$$\mathbf{T}^{(L)}(g)x \doteq gx \qquad \wedge \qquad \mathbf{T}^{(R)}(g)x \doteq xg^{-1}, \qquad \forall g \in \mathrm{G},\ x \in R_{\mathrm{G}} \tag{94}$$

Beweis: Die Darstellungseigenschaft sind gegeben:

$$\mathbf{T}^{(L)}(g_1g_2)x = g_1g_2x = \mathbf{T}^{(L)}(g_1)g_2x = \mathbf{T}^{(L)}(g_1)\mathbf{T}^{(L)}(g_2)x$$
$$\mathbf{T}^{(R)}(g_1g_2)x = x(g_1g_2)^{-1} = xg_2^{-1}g_1^{-1} = \mathbf{T}^{(R)}(g_1)xg_2^{-1} = \mathbf{T}^{(R)}(g_1)\mathbf{T}^{(R)}(g_2)x$$

Gruppenalgebra und die reguläre Darstellung II

Für die links- und rechts reguläre Darstellung gilt:

$$\mathbf{T}^{(L)}(g)x = g\left(\sum_{h \in \mathrm{G}} x_h \cdot h\right) = \sum_{h \in \mathrm{G}} x_h \cdot gh = \sum_{h \in \mathrm{G}} x_{g^{-1}h} \cdot h \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathbf{T}^{(L)}(g)x)_h = (x)_{g^{-1}h} \tag{95}$$

$$\mathbf{T}^{(R)}(g)x = \left(\sum_{h \in \mathrm{G}} x_h \cdot h\right) g^{-1} = \sum_{h \in \mathrm{G}} x_h \cdot hg^{-1} = \sum_{h \in \mathrm{G}} x_{hg} \cdot h \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathbf{T}^{(R)}(g)x)_h = (x)_{hg} \tag{96}$$

Beispiel: Betrachten wir die Gruppe S_3 und die links reguläre Darstellung, dann gilt:

$$(\mathbf{T}^{(L)}(\sigma_k)x)_{\sigma_j} = (x)_{\sigma_k^{-1}\sigma_j} \qquad \wedge \qquad x = \sigma_i \qquad \Longrightarrow \qquad x_m = \delta_{\sigma_m, \sigma_i} \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathbf{T}^{(L)}(\sigma_k)\sigma_i)_{\sigma_j} = \delta_{\sigma_k^{-1}\sigma_j, \sigma_i}$$

Beispielsweise gilt für die Darstellungsmatrizen (Man achte auf (51), deswegen gilt $(\mathbf{T}^{(L)}(\sigma_k)\sigma_i)_{\sigma_j} = (\mathbf{T}^{(L)}(\sigma_k))_{ji}$):

$$\mathbf{T}^{(L)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}^{(L)}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}^{(L)}(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{(L)}(\sigma_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}^{(L)}(\sigma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}^{(L)}(\sigma_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, in den Spalten der Darstellungsmatrizen stehen die Bilder der Basisvektoren. Für die Charaktere folgt:

$$\chi_1^{(L)} = \chi^{(L)}(\sigma_1) = 6 \qquad \wedge \qquad \chi_2^{(L)} = \chi^{(L)}(\sigma_2) = 0 \qquad \wedge \qquad \chi_3^{(L)} = \chi^{(L)}(\sigma_4) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\chi^{(L)}|\chi^{(L)}) = 6$$

Die regulären Darstellung

Lemma

Für die links- bzw. rechts reguläre Darstellung gilt:

$$\chi^{(L,R)}(g) = |\mathrm{G}|\delta_{e,g} \tag{97}$$

Beweis: Der Beweis folgt aus der Tatsache, dass aus $gh = h$ folgt, dass $g = e$ gilt und somit alle Darstellungsmatrizen auf der Diagonale immer eine 0 enthalten, außer für den Fall der Identität $\mathbf{T}^{(R,L)}(e) = \mathbf{1}$.

Lemma

Die reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe G *zerfällt in* A *irreduzible Darstellungen* $\mathbf{T}^{(a)}$ *in der Form:*

$$\mathbf{T}^{(R,L)}(g) = \bigoplus_{a=1}^{A} \alpha_a \mathbf{T}^{(a)}(g) \tag{98}$$

mit Vielfachheit $\alpha_a = n_a = \dim \mathbf{T}^{(a)}$ *und*

$$\sum_{a=1}^{A} n_a^2 = |\mathrm{G}| \tag{99}$$

Beweis: Betrachten wir (84) so folgt:

$$\alpha_a = (\chi^{(a)}|\chi^{(R,L)}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} \chi^{(a)}(g)\chi^{(R,L)}(g) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\chi^{(a)}(e)\chi^{(R,L)}(e) \overset{(97)}{=} n_a$$

Zweite Orthogonalitätsrelation

V12 - 2805

Theorem

Wir betrachten eine endliche Gruppe G *die in* M *Konjugationsklassen* $\mathrm{H}_i = \mathrm{G} \bullet h_i,\ i = 1, ..., M$ *der Ordnung* m_i *zerfalle. Dann ist die Anzahl aller irreduziblen unitären inäquivalenten Darstellungen* $\mathbf{T}^{(a)}$ *ist gleich* M *und es gilt*

$$\sum_{a=1}^{M} \bar{\chi}_i^{(a)}\chi_j^{(a)} = \frac{|\mathrm{G}|}{m_i}\delta_{ij}, \qquad i,j = 1, ..., M. \tag{100}$$

Beweis: Aus der Gleichung (80) folgt für $h \in \mathrm{H}_i,\ h' \in \mathrm{H}_j$:

$$\chi_i^{(a)}\chi_j^{(a)} = \frac{n_a}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} \chi^{(a)}(hgh'g^{-1}) \qquad i,j = 1, \dots, M,\ \ a = 1, \dots, A,\ \ n_a = \dim \mathbf{T}^{(a)}$$

wobei A zunächst unbekannt ist. Nun setzen wir $h \to h^{-1}$ und beachten $\chi(h^{-1}) = \bar{\chi}(h)$ und summieren über alle $a = 1, \dots, A$

$$\sum_{a=1}^{A} \bar{\chi}_i^{(a)}\chi_j^{(a)} = \sum_{a=1}^{A} \frac{n_a}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} \chi^{(a)}(h^{-1}gh'g^{-1}) \overset{(98)}{=} \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} \chi^{(R,L)}(h^{-1}gh'g^{-1}) \overset{(97)}{=} \sum_{g\in\mathrm{G}} \delta_{e,h^{-1}gh'g^{-1}}$$

Kommen h, h' aus verschiedenen Konjugationsklassen ($i \neq j$), dann gilt: $h \neq gh'g^{-1}$, also $\delta_{e,h^{-1}gh'g^{-1}} = \delta_{h,gh'g^{-1}} = 0$. Sind sie in der selben Konjugationsklasse ($i = j$), dann benutzen wir (86):

$$m_i \sum_{a=1}^{A} \bar{\chi}_i^{(a)}\chi_i^{(a)} = \sum_{a=1}^{A}\sum_{h\in\mathrm{H}_i} \bar{\chi}^{(a)}(h)\chi^{(a)}(h') = \sum_{g\in\mathrm{G}}\sum_{h\in\mathrm{H}_i} \delta_{h,gh'g^{-1}} = |\mathrm{G}| \tag{101}$$

somit folgt insgesamt (100), wenn noch gezeigt wird, dass $A = M$ ist. Um dies zu zeigen summieren wir (101) über $i = 1, \dots, M$ und (87) über $a = b = 1, \dots, A$ und setzen beide Seiten gleich, woraus dann folgt $A = M$.

Charakter-Tabellen

Zusammenfassung und Definition

Für eine Gruppe G endlicher Ordnung gibt es M nichtäquivalente irreduzible Darstellungen $\mathbf{T}^{(1)}, ..., \mathbf{T}^{(M)}$ der Dimension $n_a = \dim \mathbf{T}^{(a)}$ und M Konjugationsklassen H_i mit $m_i = |\mathrm{H}_i|$, es gilt:

$$\sum_{a=1}^{M} n_a^2 = |\mathrm{G}| \qquad \wedge \qquad \sum_{i=1}^{M} m_i = |\mathrm{G}| \tag{102}$$

Es gelten die Orthogonalitätsrelationen für Charaktere $\chi_i^{(a)}$:

$$\sum_{i=1}^{M} m_i \chi_i^{(a)} \bar{\chi}_i^{(b)} = |\mathrm{G}|\delta_{ab} \qquad \wedge \qquad \sum_{a=1}^{M} \chi_i^{(a)} \bar{\chi}_j^{(a)} = \frac{|\mathrm{G}|}{m_i}\delta_{ij} \tag{103}$$

Die Eins-Darstellung sei: $\mathbf{T}^{(1)} = 1$, desweiteren nehmen wir an: $1 = n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_M$ und setzen: $\mathrm{H}_1 \equiv \mathrm{G} \bullet e = \{e\}$. Diese Charaktere fasst mit in einer *Charakter-Tabelle* zusammen:

	H_1	$m_2\mathrm{H}_2$	...	$m_M\mathrm{H}_M$
$\chi^{(1)}$	1	1	...	1
$\chi^{(2)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	...	$\chi_M^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$\chi^{(M)}$	$\chi_1^{(M)}$	$\chi_2^{(M)}$	...	$\chi_M^{(M)}$

Projektionsoperatoren

V13 - 0406

Definition

Wie betrachten eine Darstellung $\mathbf{T}(g)$ die in A nichtäquivalente unitäre irreduzible Darstellungen $\mathbf{T}^{(a)}$, $a = 1, ..., A$ mit Vielfachheit α_a zerfällt. Der Darstellungsraum ist die direkte Summe:

$$V = \bigoplus_{a=1}^{A} \bigoplus_{l=1}^{\alpha_a} V_l^{(a)} \tag{104}$$

Eine Basis in V sei gegeben durch:

$$V_j^{(a)} \ni v_j^{(a,i)}, \quad i = 1, ..., \alpha_a, \;\; a = 1, ..., A, \;\; j = 1, ..., n_a = \dim \mathbf{T}^{(a)}, \tag{105}$$

Dann definieren wir:

$$\mathbf{P}_{lk}^{(a)} \doteq \frac{n_a}{|\mathrm{G}|} \sum_{g\in\mathrm{G}} \bar{T}_{lk}^{(a)}(g)\mathbf{T}(g), \qquad l, k = 1, ..., n_a = \dim \mathbf{T}^{(a)}, \tag{106}$$

$$\mathbf{P}^{(a)} \doteq \frac{n_a}{|\mathrm{G}|} \sum_{g\in\mathrm{G}} \bar{\chi}^{(a)}(g)\mathbf{T}(g). \tag{107}$$

Im Folgenden betrachten wir die Projektionseigenschaften der Operatoren (106) und (107).

Projektionsoperatoren II

V14 - 0406

Lemma

Die Operatoren $\mathbf{P}^{(a)}_{(lk)}$ *aus* (106) *und* $\mathbf{P}^{(a)}$ *aus* (107) *haben die folgenden Eigenschaften:*

$$\mathbf{P}^{(a')}_{l'k'}\mathbf{P}^{(a)}_{lk} = \delta_{aa'}\delta_{k'l}\mathbf{P}^{(a)}_{l'k} \qquad \wedge \qquad \mathbf{P}^{(a)\,\dagger}_{lk} = \mathbf{P}^{(a)}_{kl} \tag{108}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n_a}\mathbf{P}^{(a)}_{kl}\mathbf{P}^{(a)}_{lk} = \mathbf{P}^{(a)} \qquad \wedge \qquad \mathbf{P}^{(a)\,\dagger} = \mathbf{P}^{(a)} \tag{109}$$

Beweis: Zunächst ist zu bemerken, dass die Räume $V^{(a)}_j$ wechselseitig orthogonal zueinander sind, also: $V^{(a)}_j \perp V^{(a')}_{j'}$ für $(a,j) \neq (a',j')$, deswegen gilt (vergleiche (51)):

$$\mathbf{T}(g)v^{(a,i)}_j = \sum_{k=1}^{n_a}\bar{T}^{(a)}_{kj}(g)v^{(a,i)}_k, \qquad j = 1,\ldots,n_a \tag{110}$$

Nun betrachten wir einen beliebigen Basisvektor $v^{(b,i)}_j$ und wenden (106) darauf an:

$$\mathbf{P}^{(a)}_{lk}v^{(b,i)}_j = \frac{n_a}{|G|}\sum_{g\in G}\bar{T}^{(a)}_{lk}(g)\mathbf{T}(g)v^{(b,i)}_j \overset{(110)}{=} \sum_{k'=1}^{n_a}\frac{n_a}{|G|}\sum_{g\in G}\bar{T}^{(a)}_{lk}(g)T^{(b)}_{k'j}(g)v^{(b,i)}_{k'} \overset{(68)}{=} \sum_{k'=1}^{n_a}\delta_{ab}\delta_{lk'}\delta_{kj}v^{(b,i)}_{k'} = \delta_{ab}\delta_{kj}v^{(b,i)}_l$$

Insgesamt also:

$$\mathbf{P}^{(a)}_{lk}v^{(b,i)}_j = \delta_{ab}\delta_{kj}v^{(b,i)}_l \tag{111}$$

Projektionsoperatoren III

V15 - 0406

Eine erneute Anwendung ergibt:

$$\mathbf{P}^{(a')}_{l'k'}\mathbf{P}^{(a)}_{lk}v^{(b,i)}_j = \delta_{ab}\delta_{kj}\mathbf{P}^{(a')}_{l'k'}v^{(b,i)}_l = \delta_{ab}\delta_{kj}\delta_{a'b}\delta_{k'l}v^{(b,i)}_{l'} = \delta_{aa'}\delta_{ab}\delta_{k'l}\delta_{kj}v^{(a,i)}_{l'} = \delta_{aa'}\delta_{ab}\delta_{k'l}\mathbf{P}^{(a)}_{l'k}v^{(b,i)}_j$$

Daraus folgt die erste Aussage in (108). Betrachten wir die zweite Aussage:

$$\mathbf{P}^{(a)\,\dagger}_{lk} = \frac{n_a}{|G|}\sum_{g\in G}T^{(a)}_{lk}(g)\mathbf{T}(g)^\dagger = \frac{n_a}{|G|}\sum_{g\in G}T^{(a)}_{lk}(g)\mathbf{T}(g^{-1}) = \frac{n_a}{|G|}\sum_{g\in G}T^{(a)}_{lk}(g^{-1})\mathbf{T}(g) = \frac{n_a}{|G|}\sum_{g\in G}\bar{T}^{(a)}_{kl}(g)\mathbf{T}(g) = \mathbf{P}^{(a)}_{kl}$$

Um die Aussagen (109) zu zeigen beachten wir das gilt:

$$\sum_{k=1}^{n_a}\mathbf{P}^{(a)}_{kk} = \sum_{k=1}^{n_a}\frac{n_a}{|G|}\sum_{g\in G}\bar{T}^{(a)}_{kk}(g)\mathbf{T}(g) = \frac{n_a}{|G|}\sum_{g\in G}\bar{\chi}^{(a)}(g)\mathbf{T}(g) = \mathbf{P}^{(a)}$$

Damit folgen dann die beiden Aussagen unmittelbar aus (108), da gilt:

$$\mathbf{P}^{(a)\,\dagger}_{kk} = \mathbf{P}^{(a)}_{kk} \qquad \wedge \qquad \mathbf{P}^{(a)}_{kl}\mathbf{P}^{(a)}_{lk} = \mathbf{P}^{(a)}_{kk} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n_a}\mathbf{P}^{(a)}_{kl}\mathbf{P}^{(a)}_{lk} = \sum_{k=1}^{n_a}\mathbf{P}^{(a)}_{kk} = \mathbf{P}^{(a)}$$

Setzt man in (108) alle Indizes gleich, so folgt:

$$\mathbf{P}^{(a)}_{ll}\mathbf{P}^{(a)}_{ll} = \mathbf{P}^{(a)}_{ll} \qquad \wedge \qquad \mathbf{P}^{(a)\,\dagger}_{ll} = \mathbf{P}^{(a)}_{ll} \qquad l = 1,\ldots,n_a \tag{112}$$

damit ist $\mathbf{P}^{(a)}_{ll}$ ein Projektionsoperator.

Betrachten wir einen beliebigen Vektor aus V entwickelt nach der Basis $v^{(a,i)}_j$:

$$v = \sum_{a=1}^{A}\sum_{i=1}^{\alpha_a}\sum_{j=1}^{n_a}\xi^{(a,i)}_j v^{(a,i)}_j, \qquad \xi^{(a,i)}_j \in \mathbb{C}$$

Projektionsoperatoren

Für ein festes aber beliebiges $l = 1, \ldots, n_a$ folgt dann:

$$\Longrightarrow \quad w_{lk}^{(a)} \doteq \mathbf{P}_{lk}^{(a)} v = \sum_{a'=1}^{A} \sum_{i=1}^{\alpha_a} \sum_{j=1}^{n_a} \xi_j^{(a,i)} \mathbf{P}_{lk}^{(a)} v_j^{(a',i)} = \sum_{i=1}^{\alpha_a} \xi_k^{(a,i)} v_l^{(a,i)} \in V_l^{(a)}, \quad k = 1, \ldots, n_a \tag{113}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{T}(g) w_{lk}^{(a)} = \sum_{i=1}^{\alpha_a} \xi_k^{(a,i)} \sum_{l'=1}^{n_a} T_{l'l}^{(a)}(g) v_{l'}^{(a,i)} = \sum_{l'=1}^{n_a} T_{l'l}^{(a)}(g) w_{l'k}^{(a)} \quad k = 1, \ldots, n_a \tag{114}$$

Wähle nun zwei verschiedene nicht triviale Vektoren $v, v' \in V$, sodass die Vektoren $w_{lk}^{(a)} \doteq \mathbf{P}_{lk}^{(a)} v$ und $w_{lk}'^{(a)} \doteq \mathbf{P}_{lk}^{(a)} v'$ senkrecht aufeinander stehen, dann gilt:

$$\left\langle \mathbf{P}_{lk}^{(a)} v | \mathbf{P}_{l'k}^{(a)} v' \right\rangle \overset{(108)}{=} \left\langle \mathbf{P}_{lk'}^{(a)} \mathbf{P}_{k'k}^{(a)} v | \mathbf{P}_{l'k'}^{(a)} \mathbf{P}_{k'k}^{(a)} v' \right\rangle \overset{(113)}{=} \left\langle \mathbf{P}_{lk'}^{(a)} w_{k'k}^{(a)} | \mathbf{P}_{l'k'}^{(a)} w_{k'k}'^{(a)} \right\rangle \overset{(113)}{=} \left\langle w_{lk}^{(a)} | w_{l'k}'^{(a)} \right\rangle$$

Es gilt aber, dass $w_{lk}^{(a)} \in V_l^{(a)}$ und $w_{l'k}'^{(a)} \in V_{l'}^{(a)}$ für alle $k = 1, \ldots, n_a$ und $V_l^{(a)} \perp V_{l'}^{(a)}$, damit folgt insgesamt:

$$\left\langle w_{lk}^{(a)} | w_{l'k}'^{(a)} \right\rangle = \left\langle \mathbf{P}_{lk}^{(a)} v | \mathbf{P}_{l'k}^{(a)} v' \right\rangle = \delta_{ll'} \left\langle w_{lk}^{(a)} | w_{lk}'^{(a)} \right\rangle = 0, \qquad \forall l, l' = 1, \ldots, n_a$$

Diese Eigenschaft wird ausgenutzt um eine gegebene Darstellung einer Gruppe vollständig auszureduzieren. Dies fassen wir im folgenden Algorithmus zusammen.

Algorithmus zur Ausreduktion einer Darstellung

Ausreduktionsalgorithmus

Gegeben sei eine unitäre Darstellung $\mathbf{T}(g)$ einer endlichen Gruppe G. Die irreduziblen unitärten Darstellungen der Gruppe seien mit $\mathbf{T}^{(a)}(g)$, $a = 1, \ldots, M$ bezeichnet. Die Darstellung $\mathbf{T}(g)$ zerfällt in A nichtäquivalente Darstellungen mit Vielfachheit α_a.

1. Bestimme alle irreduziblen unitären Darstellungen $\mathbf{T}^{(a)}(g)$ und die Charakter-Tabelle.
2. Bestimme die Vielfachheiten über $\alpha_a = (\chi|\chi^{(a)})$, $a = 1, \ldots, M$.
3. Bilde für alle $\mathbf{T}^{(a)}(g)$, $a = 1, \ldots, A$ mit $\alpha_a \neq 0$:

$$\mathbf{P}_{11}^{(a)} = \frac{n_a}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{T}_{11}^{(a)}(g) \mathbf{T}(g) \qquad \wedge \qquad \mathcal{B}_1^{(a)} \doteq \mathcal{B}(P_{11}^{(a)}) = \{P_{11}^{(a)} v | v \in V\} \tag{115}$$

4. Wähle eine orthonormierte Basis $e_{l1}^{(a)}$, $l = 1, \ldots, \alpha_a = \dim \mathcal{B}_1^{(a)}$ in $\mathcal{B}_1^{(a)}$
5. Bilde für alle $l = 1, \ldots, \alpha_a$ die orthonormierten Vektoren:

$$e_{lj}^{(a)} \doteq P_{j1}^{(a)} e_{l1}^{(a)} = \frac{n_a}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{T}_{j1}^{(a)}(g) \mathbf{T}(g) e_{l1}^{(a)}, \qquad j = 1, \ldots, n_a \tag{116}$$

6. Die Vektoren $e_{lj}^{(a)}$, $a = 1, \ldots, A$, $l = 1, \ldots, \alpha_a$, $j = 1, \ldots, n_a$ bilden die Spalten der diagonalisierenden Matrix $\mathbf{S}^{-1} = (e_{11}^{(1)}, e_{12}^{(1)}, \ldots, e_{1n_1}^{(1)}, e_{21}^{(1)}, e_{22}^{(1)} \ldots, e_{lj}^{(a)}, e_{lj+1}^{(a)}, \ldots, e_{\alpha_A n_A}^{(A)})$, für die dann gilt: $\mathbf{S}\mathbf{T}(g)\mathbf{S}^{-1} = \bigoplus_a \alpha_a \mathbf{T}^{(a)}(g)$.

Algorithmus zur Ausreduktion einer Darstellung II

Beispiel: Betrachten wir S_3: Die Charakter-Tabelle und Vielfachheiten wurden schon bestimmt, es gilt:

$\chi^{(a)}(g)$	e	$2H_2$	$3H_3$	n_a	$\alpha_a = (\chi^{(a)}\|\chi)$
$\chi^{(1)}(g)$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}(g)$	1	1	-1	1	0
$\chi^{(3)}(g)$	2	-1	0	2	1
$\chi(g)$	3	0	1	3	

$$\mathbf{P}_{11}^{(1)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathcal{B}_1^{(1)} = \{\lambda(1,1,1)^t \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} \implies e_{11}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{11}^{(3)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathcal{B}_1^{(3)} = \{\lambda(2,-1,-1)^t \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} \implies e_{11}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_{12}^{(3)} = \mathbf{P}_{21}^{(3)} e_{11}^{(3)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich insgesamt die Matrix:

$$\mathbf{S}^{-1} = (e_{11}^{(1)}, e_{11}^{(3)}, e_{12}^{(3)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \implies \mathbf{S}\mathbf{T}(g)\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^{(3)}(g) \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{T}^{(3)}(g)$ die 2-dimensionale Darstellung der S_3 ist.

Tensorprodukt von Darstellungen I

In der Praxis ist eine oft eien Darstellung $\mathbf{T}(g)$ von G gegeben und man ist an der Zerlegung in irreduzible Darstellungen:

$$\mathbf{T}(g) = \bigoplus_{a=1}^{A} \alpha_a \mathbf{T}^{(a)}(g)$$

interessiert. Dabei kommt es oft vor, dass die Darstellung $\mathbf{T}(g)$ durch ein Tensorprodukt gegeben ist.

Definition

Es seien $\mathbf{T}$ und $\mathbf{T}'$ zwei Darstellungen der Gruppe G mit Darstellungsräumen V und V' mit Basen v_i, $i = 1, ..., n$ und v'_k, $k = 1, ..., n'$. Dann definieren wir die Matrix-Darstellung auf dem Tensorproduktraum $W \doteq V \otimes V'$ durch:

$$[\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'](g) v_i \otimes v'_k \doteq \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n'} T_{ji}(g) T'_{lk}(g) v_j \otimes v'_l \tag{117}$$

mit $v_i \otimes v'_k \in W$.

Für den Charakter der Tensorprodukt-Darstellung er gibt sich dann:

$$[\chi \otimes \chi'](g) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n'} T_{ii}(g) T'_{kk}(g) = \chi(g)\chi'(g) \tag{118}$$

Clebsch-Gordan-Entwicklung I

Definition

Es sei $\mathbf{T}^{(a)}(g),\ a = 1, \ldots, M$ ein vollständiger Satz von irreduziblen Darstellungen der Gruppe G, wobei M die Zahl der Konjugationsklassen von G ist. Die Zerlegung der Tensorproduktdarstellung zweier Darstellungen in irreduzible Darstellungen:

$$[\mathbf{T}^{(a)} \bigotimes \mathbf{T}^{(b)}](g) = \bigoplus_{c=1}^{C} \alpha_{abc}\mathbf{T}^{(c)}(g) \qquad \wedge \qquad \alpha_{abc} = (\chi^{(a)}\chi^{(b)}|\chi^{(c)}) \tag{119}$$

nennt man die Clebsch-Gordan-Reihe.

Die Zerlegung eines Tensorproduktes in eine Clebsch-Gordan-Reihe ist eine der wichtigsten Anwendungen im Bereich der Physik. Die bekannteste Clebsch-Gordan-Reihe tritt bei der Drehimpulskopplung auf. Es sei eine Basis $v_i^{(a)},\ i = 1, \ldots, n$ und $v_k^{b},\ k = 1, \ldots, n_b$ in $V^{(a)}$ und $V^{(b)}$ gegeben. Dann ist $v_i^{(a)} \otimes v_k^{(b)} \in W$ eine Basis in $W = V^{(a)} \otimes V^{(b)}$. Da aber die Tensorproduktdarstellung $\mathbf{T}^{(a)} \otimes \mathbf{T}^{(b)}$ im Allgemeinen reduzibel ist existiert eine Basis $w_l^{(c,s)}$ für das vollständige System irreduzibler Darstellungen $\mathbf{T}^{(c,s)}$ mit $c = 1, \ldots, A,\ s = 1, \ldots, \alpha_a$ und $l = 1, \ldots, n_c$. Die zwei Basen stehen dann über eine nichtsinguläre Transformation miteinander in Beziehung:

$$w_l^{(c,s)} = \sum_{i=1}^{n_a}\sum_{j=1}^{n_b} C_{cs,l}^{ai,bj} v_i^{(a)} \otimes v_k^{(b)} \tag{120}$$

Die Koeffizienten $C_{cs,l}^{ai,bj}$ nennt man die Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Diese bilden eine invertierbare $n_a n_b \times n_a n_b$-Matrix. Die natürliche Basis $v_i^{(a)} \otimes v_k^{(b)}$ ist die *einfachere* aber die *ausreduzierte* Basis $w_l^{(c,s)}$ ist die in der Praxis nützlichere Basis. Die ausreduzierte Basis zu finden ist eine Hauptaufgabe der Darstellungstheorie.

Das m-fache Tensorprodukt ausgelassen im SS08 I

Definition

Gegeben sei ein Vektorraum V mit einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann nennen wir die Elemente des m-fachen Tensorproduktraums:

$$V^{\otimes m} \doteq \bigotimes_{l=1}^{m} V \tag{121}$$

kontravariante Tensoren vom Rang m. Jeder Tensor $\mathbf{A}$ kann eindeutig geschrieben werden als:

$$\mathbf{A} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j_l=1}^{n} A_{j_1,\ldots,j_m} v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m} \tag{122}$$

dabei bilden $\{v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m},\ 1 \le j_1, \ldots, j_m \le n\}$ eine Basis von $V^{\otimes m}$.

Die Darstellung (122) gilt in der Basis v_j, nach dem Übergang zu einer anderen Basis v_j', etwa in der Form:

$$v_j = \sum_{l=1}^{n} g_{lj} v_l', \quad j = 1, \ldots, n \qquad \mathbf{G} \in \mathrm{GL}_n \tag{123}$$

ergibt sich die Darstellung des Tensors $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k_l=1}^{n} A'_{k_1,\ldots,k_m} v'_{k_1} \otimes \cdots \otimes v'_{k_m} \qquad \wedge \qquad A'_{k_1,\ldots,k_m} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j_l=1}^{n} A_{j_1,\ldots,j_m} g_{k_1 j_1} \cdots g_{k_m j_m} \tag{124}$$

Das m-fache Tensorprodukt

Betrachten wir nun eine Gruppe $G = GL_n(V)$, dann definieren wir eine Darstellung auf dem Tensorproduktraum $V^{\otimes m}$ über:

$$\mathbf{T}^{\otimes m}(g)w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \doteq gw_1 \otimes \cdots \otimes gw_m, \qquad \forall g \in GL_n(V), w_j \in V,\ j = 1, \ldots, m \tag{125}$$

wobei gilt:

$$gv_j = \sum_{l=1}^{n} g_{lj} v_l, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{126}$$

Damit folgt:

$$\mathbf{T}^{\otimes m}(g)\mathbf{A} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k_l=1}^{n} A'_{k_1,\ldots,k_m} v'_{k_1} \otimes \cdots \otimes v'_{k_m} \qquad \wedge \qquad A'_{k_1,\ldots,k_m} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j_l=1}^{n} A_{j_1,\ldots,j_m} g_{k_1 j_1} \cdots g_{k_m j_m}$$

Dies ist identisch mit (122). Während in der ersteren Form aber das Koordinatensystem gedreht wurde durch eine neue Basis, ist die zweite Form so zu interpretieren, dass der Tensor selber transformiert wird unter Beibehaltung der Basis.
Eine weitere Darstellung ist definiert durch:

$$\hat{\mathbf{T}}^{\otimes m}(g)\mathbf{A} \doteq \mathbf{T}^{(D)}(g) \otimes \mathbf{T}^{\otimes m}(g) \qquad \wedge \qquad \mathbf{T}^{(D)}(g) \doteq \det g \tag{127}$$

Es handelt sich bei $\mathbf{T}^{(D)}(g)$ offenbar um eine Darstellung. Da die Determinante nicht von der Basis abhängt gilt:

$$A'_{k_1,\ldots,k_m} = \det g \sum_{l=1}^{m} \sum_{j_l=1}^{n} A_{j_1,\ldots,j_m} g_{k_1 j_1} \cdots g_{k_m j_m} \tag{128}$$

Polare- und axiale Tensoren

Definition

Sei $G = O_3$ mit einem reellen Darstellungsraum V mit Basis v_1, v_2, v_3. Ein Tensor vom Rang m heißt **polarer Tensor** vom Rang m, wenn für $\mathbf{O} \in O_3$ gilt:

$$A'_{k_1,\ldots,k_m} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j_l=1}^{3} A_{j_1,\ldots,j_m} O_{k_1 j_1} \cdots O_{k_m j_m} \tag{129}$$

und erheißt **axialer Tensor** vom Rang m, wenn gilt:

$$A'_{k_1,\ldots,k_m} = \det O \sum_{l=1}^{m} \sum_{j_l=1}^{3} A_{j_1,\ldots,j_m} O_{k_1 j_1} \cdots O_{k_m j_m} \tag{130}$$

Beispiel: Im Folgenden summieren wir über doppelt auftretende Indizes und betrachten den Tensor:

$$(u \times w)_k = \epsilon_{k l_1 l_2} u_{l_1} w_{l_2} \qquad \wedge \qquad u'_k = O_{kl} u_l \qquad \wedge \qquad w'_k = O_{kl} w_l$$

Dann folgt:

$$(u' \times w')_k = \epsilon_{k l_1 l_2} u'_{l_1} w'_{l_2} = \epsilon_{k l_1 l_2} O_{l_1 k_1} O_{l_2 k_2} u_{k_1} w_{k_2} = \epsilon_{l_1 l_2 l_3} \delta_{l_3 k} O_{l_1 k_1} O_{l_2 k_2} u_{k_1} w_{k_2} = \epsilon_{l_1 l_2 l_3} O_{k k_3} O_{l_3 k_3} O_{l_1 k_1} O_{l_2 k_2} u_{k_1} w_{k_2}$$

Nun verwenden wir:

$$\epsilon_{l_1 l_2 l_3} O_{l_1 k_1} O_{l_2 k_2} O_{l_3 k_3} = \epsilon_{k_1 k_2 k_3} \det O$$

und erhalten:

$$(u' \times w')_k = \det \mathbf{O} \epsilon_{k_1 k_2 k_3} O_{k k_3} u_{k_1} w_{k_2} = \det \mathbf{O} O_{k k_3} (u \times w)_{k_3}$$

Damit handelt es sich bei dem Vektor $u \times w$ um einen axialen Tensor vom Rang 1.

3. Lie-Gruppen und Lie-Algebren
- Analytische Funktionen von Operatoren
- Lie-Gruppen
- Lie-Algebren
- Einparametrige Untergruppen
- Die adjungierte Darstellung
- Darstellung von Lie-Gruppen und Lie-Algebren
- Lokale Transformationsgruppen
- Multiplikations-Darstellungen

Normeigenschaften von linearen Operatoren I

Im Folgenden werden wir einen n-dimensionalen Skalarproduktraum V über $\mathbb{C}$ betrachten und für Vektoren aus V die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ zugrunde legen. Die Basis in V sei mit $e_1, \ldots, e_n$ bezeichnet. Bezüglich einer speziellen Basis seien die Matrixelemente von Operatoren $\mathbf{A}$ mit A_{ij} bezeichnet.

Definition und Behauptung

Es sei $\mathbf{A}$ ein linearer Operator in V, dann ist die **Norm** des Operators definiert über:

$$\|\mathbf{A}\| \doteq \max_{\substack{v\in V\\ \|v\|_2=1}} \|\mathbf{A}v\|_2 \tag{131}$$

Für die Operatornorm gilt:

1. $\|\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|v\|_2$
2. $\|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\| \leq \|\mathbf{A}_1\| \cdot \|\mathbf{A}_2\|$
3. $\|\mathbf{A}^m\| \leq \|\mathbf{A}\|^m$
4. $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{A}\|$
5. $\|\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2\| \leq \|\mathbf{A}_1\| + \|\mathbf{A}_2\|$

Beweis: Die Beweise sind elementar und folgen unmittelbar aus der Definition der Norm (131) und elementaren Eigenschaften der Funktionalanalysis.

Potenzreihen von Operatoren

Im folgenden betrachten wir allgemeine Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{132}$$

mit Konvergenzradius r, dann definiert:

$$f(\mathbf{A}) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbf{A}^n \tag{133}$$

eine Potenzreihe für den Operator, die konvergiert, wenn bezüglich der Operatornorm (131) die Partialsumme:

$$S_N(\mathbf{A}) \doteq \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \mathbf{A}^n \tag{134}$$

eine Cauchyfolge darstellt, die konvergiert wenn $\|\mathbf{A}\| < r$. Die analytischen Eigenschaften der Potenzreihe (132) übertragen sich dann auf die Operatorpotenzreihe (133) in zum Teil modifizierter Form, verursacht durch die Nichtkommutativität der Opertaoren. Die für uns wichtigsten Potenzreihen im Folgenden sind:

$$\exp(\mathbf{A}) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n, \qquad \|\mathbf{A}\| < \infty \tag{135}$$

$$\ln(\mathbf{1}+\mathbf{A}) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mathbf{A}^n, \qquad \|\mathbf{A}\| < 1 \tag{136}$$

und daraus folgend:

$$\ln(\exp(\mathbf{A})) = \mathbf{A}, \quad \|\mathbf{A}\| < 2 \qquad \wedge \qquad \exp(\ln(\mathbf{1}+\mathbf{A})) = \mathbf{1}+\mathbf{A}, \quad \|\mathbf{A}\| < 1 \tag{137}$$

Analytische Eigenschaften von Operatorpotenzreihen

Theorem

Die Abbildungen:

$$\mathfrak{a}_n \doteq \{\mathbf{A} \in M(n\times n, \mathbb{K}) \mid \|\mathbf{A}\| < \epsilon < 1\} \ni \mathbf{A} \mapsto \exp(\mathbf{A}) \tag{138}$$

$$\mathfrak{b}_n \doteq \{\mathbf{B} \in M(n\times n, \mathbb{K}) \mid \|\mathbf{A}-\mathbf{1}\| < \delta < 1\} \ni \mathbf{B} \mapsto \ln(\mathbf{B}) \tag{139}$$

sind für hinreichend kleine ϵ, δ sind inverse zu einander und analytische Funktionen ihrer Matrixelemente.

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Eigenschaften (135)-(137). Mit dieser Eigenschaft folgt damit, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung immer eine Darstellung der Form $\mathbf{A} = \exp(\mathbf{B})$ bzw. $\mathbf{B} = \ln(\mathbf{A})$.
Im Folgenden definieren wir Funktionen von Operatoren immer über die Potenzreihendarstellung der Funktion.
Für Ableitungen von Operatoren nach einem Parameter gelten die Rechenregeln:

$$\frac{d}{dt}[\alpha_1 \mathbf{A}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{A}_2(t)] = \alpha_1 \dot{\mathbf{A}}_1(t) + \alpha_2 \dot{\mathbf{A}}_2(t) \tag{140}$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}_1(t)\mathbf{A}_2(t)] = \dot{\mathbf{A}}_1(t)\mathbf{A}_2(t) + \mathbf{A}_1(t)\dot{\mathbf{A}}_2(t) \tag{141}$$

wobei mit $\dot{\mathbf{A}}(t)$ die Ableitungen der Matrixelemente nach dem Parameter bezeichnet wird. Insbesondere gilt:

$$\frac{d}{dt}\exp(t\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n \frac{d}{dt} t^n = \mathbf{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n t^n = \mathbf{A}\exp(t\mathbf{A}) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{A} \tag{142}$$

Lie-Gruppen

Vereinfacht ausgedrückt ist eine Lie-Gruppe eine unendliche Gruppe mit einer analytischen Parametrisierung ihrer Gruppenelemente. Oder in der Terminologie der Analysis ist es eine diffenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer zusätzlichen Gruppenstruktur.
Wir betrachten im Folgenden den Körper $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}^m$ den Vektorraum mit Elementen $g = (g_1, \ldots, g_m)$ und $\mathrm{V} \subset \mathbb{K}^m$. Das neutrale Element sei $e = (0, \ldots, 0)$.

Definition

Eine m-dimensionale **lokale Lie-Gruppe** G in einer Umgebung $\mathrm{V} \subset \mathbb{K}^m$ ist gegeben durch eine Abbildung:

$$(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \ni (g, h) \mapsto \phi(g, h) \in \mathbb{K}^m, \tag{143}$$

mit den Eigenschaften

1. $\phi(g, h) \in \mathbb{K}^m \quad \forall g, h \in \mathrm{V}$
2. $\phi(g, h)$ ist eine analytische Funktion der $2m$ Elemente $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m$.
3. Für $\phi(g, h) \in \mathrm{V}$ und $\phi(h, k) \in \mathrm{V}$ gilt $\phi(\phi(g, h), k) = \phi(g, \phi(h, k))$.
4. $\phi(0, g) = \phi(g, 0) = g, \quad \forall g \in \mathrm{V}$.

Eigenschaft 3. entspricht dem Assoziativ-Gesetz, Eigenschaft 4. der Existenz eines neutralen Elementes.
Aus den Eigenschaften 2.-4. folgt die Existenz einer Inversen. Wenn ϕ_i das i-te Element von ϕ sei, dann folgt aus 2. und 4.:

$$\left.\frac{\partial \phi_i(0, g)}{\partial g_j}\right|_{g=0} = \frac{\partial g_i}{\partial g_j} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, m$$

Lie-Gruppen und Algebren Lie-Gruppen

Lie-Gruppen

Daraus folgt: $\det |\partial \phi_i(0, g)/\partial g_j|(0, 0) = 1$ und mit Hilfe des Satzes über Implizite Funktionen die Existenz einer Lösung x für alle g der Gleichung:

$$\phi(g, x) = e$$

und damit die Existenz einer Rechts-Inversen. Die Links-Inverse folgt analog.

Beispiel: Als Beispiel für eine parametrisierte Gruppe betrachten wir $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit der Darstellung:

$$A_{ij} = \delta_{ij} + x_{ij}, \qquad x_{ij} \in \mathbb{C}, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{144}$$

wobei x_{ij} in einer geeigneten Umgebung der Nullmatrix gegeben ist. Dies ist eine Parametrisierung mit $m = n^2$ komplexen Parametern. Somit stellt GL_n eine n^2-dimensionale komplexe Lie-Gruppe dar.

Im Folgenden betrachten wir im Speziellen Lie-Gruppen, die durch eine Matrix-Darstellung definiert sind, solche Lie-Gruppen nennt man lokal lineare Lie-Gruppe. In der Physik hat man es meist mit solchen Lie-Gruppen zu tuen. Die freien Parameter der Gruppen ergeben sich wie im Kapitel 4 beschrieben. Wir bezeichnen diese Parameter im Folgenden mit $g = (g_1, \ldots, g_m)$, wobei je nach Situation auch zugelassen ist, dass diese Parameter komplexe sind. Da es sich um Matrizen handelt, die durch ihre Gruppen-Eigenschaften spezieffiziert sind, bezeichen wir die Gruppenelemente mit $\mathbf{A} = \mathbf{A}(g)$.

Lie-Gruppen III

Definition

Es sei $\mathrm{V} \subset \mathbb{K}^m$ eine offene zusammenhängende Menge, die das neutrale Element $e = 0 \equiv (0, ..., 0)$ enthält. Eine m-dimensionale **lokal lineare Lie Gruppe** G ist eine Menge von nichtsingulären $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}(g) \equiv \mathbf{A}(g_1, \ldots, g_m)$, definiert für alle $g \in \mathrm{V}$, so dass gilt:

1. $\mathbf{A}(0) = \mathbf{1}_n$
2. Die Matrixelemente von $\mathbf{A}(g)$ sind differenzierbare Funktionen der Parameter $g_1, \ldots, g_m$ und die Abbbildung $g \mapsto \mathbf{A}(g)$ ist bijektiv.
3. Die m Matrizen
$$\frac{\partial \mathbf{A}(g)}{\partial g_j}, \qquad \forall g = (g_1, ..., g_m) \in \mathrm{V}, \quad j = 1, \ldots, m \tag{145}$$
sind linear unabhängig.
4. Es existiert eine Umgebung $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$ von $0 \in \mathbb{K}^m$, so dass für $g, h \in \mathrm{V}'$ ein $k \in \mathrm{V}$ existiert mit:
$$\mathbf{A}(g) \circ \mathbf{A}(h) = \mathbf{A}(k) \tag{146}$$

Somit definiert jede lokal lineare Lie-Gruppe eine lokale Lie-Gruppe. Die zu Beginn eingeführten Gruppen: GL, SU, U, ... sind Beispiele für solche Gruppen, die Anzahl der freien Parameter für diese Gruppen wurde dort angegeben. Wir verwenden die natürliche Indizierung der Elemente, so dass gilt: $[A(g)]_i = g_i, \; i = 1, ..., m$. Der Zusammenhang mit der loakeln Lie-Gruppe ist damit gegeben über $\phi(g, h) = \mathbf{A}(g) \circ \mathbf{A}(h)$. Betrachten wir nun den Zusammenhang von Lie-Gruppen und Lie-Algebren.

Lie-Algebren I

Definition

Es sei eine lokale Lie-Gruppe G in $\mathrm{V} \subseteq \mathbb{K}^m$ gegeben. Eine **differenzierbare Kurve** durch das neutrale Elemente von G ist eine Abbildung:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) = (g_1(t), \ldots, g_m(t)) \in \mathrm{G}, \tag{147}$$

so dass gilt $g(0) = e = 0$ und $g_i(t), \; i = 1, \ldots, m$ sind differenzierbare Funktionen. Der **Tangentenvektor** τ im Punkt e ist dann definiert durch:

$$\tau \equiv \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} = (\dot{g}_1(0), \ldots, \dot{g}_m(0)) \in \mathrm{T}_e\mathrm{G}. \tag{148}$$

Der Raum $\mathrm{T}_e\mathrm{G}$ ist der Vektorraum aller Tangentenvektoren im neutralen Element e von G.

Betrachten wir zunächst eine Definition für eine Lie-Algebra, die auf den Tangentenvektoren aufbaut.

Definition

Eine Lie-Algebra L(G) einer lokalen Lie-Gruppe G ist die Menge aller Tangentenvektoren in e zusammen mit einer skalaren Multiplikation, einer Vektoraddition und einem Kommutator $[\cdot, \cdot]$.

Eine abstrakte Definition einer Lie-Algebra, die keinen Bezug auf eine Lie-Gruppe macht kann ebenfalls als Ausgangspunkt benutzt werden. Der *Kommutator* ist dabei als zusätzliche Abbildungseigenschaft zu verstehen, der bestimmte Eigenschaften besitzt.

Lie-Algebren II

Definition

Eine **abstrakte Lie-Algebra** $\mathcal{G}$ über $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ zusammen mit mit einem Kommutator(Produkt) $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] \in \mathcal{G}$, sodass für alle $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \in \mathcal{G}$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:

1. $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] = -[\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1]$
2. $[a\mathcal{A}_1 + b\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3] = a[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3] + b[\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3]$
3. $[[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2], \mathcal{A}_3] + [[\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1], \mathcal{A}_2] + [[\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3], \mathcal{A}_1] = 0$

Eigenschaft 1. ist Schiefsymmetrie des Kommutators, 2. die Bilinearität und 3. die Jacobi-Gleichung. Im Folgenden nehmen wir immer an, dass $\mathcal{G}$ endlich-dimensional ist, desweiteren wollen wir den Unterschied zwischen einer Lie-Algebra und einer abstrakten Lie-Algebra nicht weiter verfolgen und sprechen immer von einer Lie-Algebra $\mathcal{G}$ der Lie-Gruppe G. Ein Beispiel für einen solche Lie-Algebra wäre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in V = \mathbb{K}^3$ und das Vektorprodukt $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.
Um die Begriffe zu verdeutlichen, diskutieren wir kurz lineare Lie-Gruppen mit einer analytischen Kurve gegeben durch: $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}(g(t)) = \mathbf{A}(g_1(t), \ldots, g_m(t))$, $\mathbf{A}(0) = \mathbf{1}_n$. Betrachten wir nun den Tangentenvektor:

$$\mathcal{A} \doteq \left.\frac{d\mathbf{A}(g(t))}{dt}\right|_{t=0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial \mathbf{A}(g)}{\partial g_i}\right|_{g=e} \dot{g}_i(0) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i \tau_i, \quad \mathcal{A}_i \doteq \left.\frac{\partial \mathbf{A}(g)}{\partial g_i}\right|_{g=e} \tag{149}$$

mit den m linear unabhängigen $(n \times n)$-Matrizen $\mathcal{A}_i$ und $\tau_i = \dot{g}_i(0)$, $i = 1, \ldots, m$. Wir sehen, dass der Tangentenvektor von $\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)$ gegeben ist durch $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Damit ist klar, dass jede Lie-Algebra L(G) auch eine abstrakte Lie-Algebra $\mathcal{G}$ ist. Die umgekehrte Aussage, dass es zu jeder abstrakte Lie-Algebra $\mathcal{G}$ eine Lie-Algebra L(G) einer lokalen Lie-Gruppe G gibt, gilt ebenfalls, wird hier aber nicht bewiesen. Deswegen werden wir ab jetzt nur noch die Bezeichnung $\mathcal{G}$ für die Lie-Algebra der Lie-Gruppe G verwenden.

Lie-Algebren III

Theorem

Sei eine Lie-Algebra $\mathcal{G}$ zusammen mit differenzierbaren Kurven $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t) \in$ G und Tangententialvektoren $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}$ gegeben. Dann ist der Kommutator gegeben durch:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \left.\frac{d\mathbf{C}(t)}{dt}\right|_{t=0} \tag{150}$$

mit

$$\mathbf{C}(t) \doteq \mathbf{A}(\hat{t}) \circ \mathbf{B}(\hat{t}) \circ \mathbf{A}^{-1}(\hat{t}) \circ \mathbf{B}^{-1}(\hat{t}) \qquad \wedge \qquad t = \hat{t}^2 \tag{151}$$

und es gilt:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} - \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \quad \in \mathcal{G} \tag{152}$$

Beweis: Um dies zu zeigen entwickeln wir die $(n \times n)$-Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ um $t = 0$ in eine Taylorreihe in $\hat{t}$:

$$\mathcal{A} = \left.\frac{d\mathbf{A}(g(t))}{dt}\right|_{t=0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{A}(\hat{t}) = \mathbf{1} + \mathcal{A}\hat{t} + \frac{\mathcal{A}'}{2}\hat{t}^2 + O(\hat{t}^3), \tag{153}$$

$$\mathcal{B} = \left.\frac{d\mathbf{B}(g(t))}{dt}\right|_{t=0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{B}(\hat{t}) = \mathbf{1} + \mathcal{B}\hat{t} + \frac{\mathcal{B}'}{2}\hat{t}^2 + O(\hat{t}^3), \tag{154}$$

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{1} + \mathbf{C}_0\hat{t} + \frac{\mathbf{C}_1}{2}\hat{t}^2 + O(\hat{t}^3). \tag{155}$$

Lie-Algebren IV

Diese Enwticklung setzen wir in $0 = \mathbf{C}(t) \circ \mathbf{B}(\hat{t}) \circ \mathbf{A}(\hat{t}) - \mathbf{A}(\hat{t}) \circ \mathbf{B}(\hat{t})$ ein und erhalten bis zur Ordnung $\hat{t}^2$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\mathbf{1} + \mathbf{C}_0 \hat{t} + \frac{\mathbf{C}_1}{2}\hat{t}^2\right) \circ \left(\mathbf{1} + \mathcal{B}\hat{t} + \frac{\mathcal{B}'}{2}\hat{t}^2\right) \circ \left(\mathbf{1} + \mathcal{A}\hat{t} + \frac{\mathcal{A}'}{2}\hat{t}^2\right) - \left(\mathbf{1} + \mathcal{A}\hat{t} + \frac{\mathcal{A}'}{2}\hat{t}^2\right) \circ \left(\mathbf{1} + \mathcal{B}\hat{t} + \frac{\mathcal{B}'}{2}\hat{t}^2\right) \\ &= \hat{t}\mathbf{C}_0 + \hat{t}^2 \left(\mathbf{C}_1/2 + \mathbf{C}_0 \circ \mathcal{A} + \mathbf{C}_0 \circ \mathcal{B} - \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{B} \circ \mathcal{A}\right) \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich in $\hat{t}$ ergibt:

$$\mathbf{C}_0 = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{C}_1/2 = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} - \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$$

Damit ergibt sich für die Entwicklung von $\mathbf{C}(t)$:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{1} + [\mathcal{A}, \mathcal{B}]\hat{t}^2 + O(\hat{t}^3) = \mathbf{C}(t) = \mathbf{1} + [\mathcal{A}, \mathcal{B}]t + O(t^{3/2})$$

und damit folgt:

$$\left.\frac{d\mathbf{C}(t)}{dt}\right|_{t=0} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$$

Also ist $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \in \mathcal{G}$ ein Tangententialvektor von $\mathbf{C}$ an $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$.
Die drei Eigenschaften der Definition 76 prüft man leicht nach. Somit ist gezeigt, dass für $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}$ auch $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \in \mathcal{G}$ ist, und somit eine Lie-Algebra bildet. Diese Bedingung schränkt die möglichen Matrizen-Lie-Algebren deutlich ein. Da der Kommutator $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \equiv \mathcal{A} \circ \mathcal{B} - \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ automatisch die Jacobi-Gleichung erfüllt, sowie schiefsymmetrisch und bilinear ist, definiert eine Menge von Matrizen, die abgeschlossen ist unter der Addition und der skalaren Multiplikation direkt eine Lie-Algebra. Es ist jedoch nicht klar zu welcher lokalen Lie-Gruppe diese Lie-Algebra dann gehört.

Strukturkonstanten einer Lie-Algebra V20 - 1806 I

Betrachten wir die Entwicklung zweier Elemente einer Lie-Gruppe G um das neutrale Element und beachten, dass gilt: $\mathbf{A}(0) = \mathbf{1}$ und $\partial(\mathbf{A}(g))_i/\partial g_j = \delta_{ij}, \partial(\mathbf{A}(g'))_i/\partial g'_j = \delta_{ij}$. Sei $\mathbf{A}(g), \mathbf{A}(g') \in$ G:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(g)\mathbf{A}(g')]_i &= \sum_{j=1}^{m} \left(\left.\frac{\partial[\mathbf{A}(g)\mathbf{A}(g')]_i}{\partial g_j}\right|_0 g_j + \left.\frac{\partial[\mathbf{A}(g)\mathbf{A}(g')]_i}{\partial g'_j}\right|_0 g'_j \right) + \sum_{j,j'=1}^{m} \left.\frac{\partial^2[\mathbf{A}(g)\mathbf{A}(g')]_i}{\partial g_j \partial g'_{j'}}\right|_0 g_j g'_{j'} + \ldots \\ &= g_i + g'_i + \sum_{j,j'=1}^{m} C_{i,jj'} g_j g'_{j'} + \ldots \qquad \wedge \qquad C_{i,jj} \doteq \left.\frac{\partial^2[\mathbf{A}(g)\mathbf{A}(g')]_i}{\partial g_j \partial g'_{j'}}\right|_{g=g'=0} \end{aligned}$$

Definition und Eigenschaft

Es sei eine lokale lineare Lie-Gruppe G mit Elementen $\mathbf{A}(g), \mathbf{A}(g')$ und $g = (g_1, ..., g_m)$, $g' = (g'_1, ..., g'_m)$ gegeben. Die **Strukturkonstanten** einer Lie-Algebra $\mathcal{G}$ sind definiert über:

$$C_i^{jk} \doteq \left.\frac{\partial^2[\mathbf{A}(g), \mathbf{A}(g')]_i}{\partial g_j \partial g'_k}\right|_{g=g'=0} \tag{156}$$

Dann gilt:

$$[\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_k] = \sum_{l=1}^{m} C_l^{jk} \mathcal{A}_l \tag{157}$$

Beweis:

$$[\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_k] \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists f_{jk}^i \in \mathbb{K} : \quad [\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_k] = \sum_l f_{jk}^l \mathcal{A}_l \qquad \Longrightarrow \qquad C_{jk}^i = \sum_l f_{jk}^l [\mathcal{A}_l]_i = \sum_l f_{jk}^l \delta_{li} = f_{jk}^i$$

Strukturkonstanten einer Lie-Algebra

Beispiel: Die Lie-Gruppe G = SU_2: Es gibt drei freie Parameter, sodass gilt: $g = (g_1, g_2, g_3)$ und damit (vergleiche (22)):

$$\mathbf{A}(g) = \begin{pmatrix} g_0 + \imath g_3 & g_2 + \imath g_1 \\ -g_2 + \imath g_1 & g_0 - \imath g_3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad g_0 = \sqrt{1 - g_1^2 - g_2^2 - g_3^2} \tag{158}$$

Es handelt sich um eine Lie-Gruppe, den $\mathbf{A}(g)|_{g=0} = \mathbf{1}$ und die Matrixelemente $A_{ij}(g)$ sind analytische Funktionen in einer Umgebung um $g = 0$ und die Matrixelemente $\partial\mathbf{A}(g)/\partial g_j$, $j = 1, 2, 3$ sind offenbar linear unabhängig. Explizit ergibt sich für die 3 Basisvektoren der Lie-Algebra $\mathcal{G} = \mathrm{su}_2$:

$$\mathcal{A}_1 = \imath \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathcal{A}_2 = \imath \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathcal{A}_3 = \imath \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{159}$$

Es gilt also die Darstellung mit Hilfe der Paulimatrizen: $\mathcal{A}_i = \imath\boldsymbol{\sigma}_i$. Um die Strukturkonstanten auszurechnen benötigen wir:

$$\frac{\partial^2 [\mathbf{A}(g), \mathbf{A}'(g')]_i}{\partial g_j \partial g'_k} = \frac{\partial^2}{\partial g_j \partial g'_k} \imath 2 \begin{pmatrix} g_2 g'_1 - g_1 g'_2 & g_3 g'_2 - g_2 g'_3 + \imath(g_3 g'_1 - g_1 g'_3) \\ g_3 g'_2 - g_2 g'_3 - \imath(g_3 g'_1 - g_1 g'_3) & -(g_2 g'_1 - g_1 g'_2) \end{pmatrix}_i$$

Oder alternativ, unter zur Hilfenahme der schon bekannten Relationen der Paulimatrizen $[\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k] = \imath 2 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \boldsymbol{\sigma}_l$:

$$C_i^{jk} = \left. \frac{\partial^2 [\mathbf{A}(g), \mathbf{A}'(g')]_i}{\partial g_j \partial g'_k} \right|_{g=g'=0} = [\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_k]_i = -2 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} (\mathcal{A}_l)_i$$

Nun gilt aber $(\mathcal{A}_l)_i = \delta_{il}$, daraus folgt dann:

$$C_i^{jk} = -2 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} (\mathcal{A}_l)_i = -2 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \delta_{li} = -2\epsilon_{ijk}$$

und daraus folgt wiederum:

$$[\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_k] = \sum_{l=1}^3 C_l^{jk} \mathcal{A}_l$$

Einparametrige Untergruppen

Definition

Eine lokal lineare Lie-Gruppe G zusammen mit einer in einer Umgebung W von $t = 0$ differenzierbaren Kurve $g(t)$ für die gilt:

$$g(s)g(t) = g(s+t), \qquad s, t, s+t \in W, \tag{160}$$

nennen wir eine **einparametrige Untergruppe** von G.

Lemma

Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, dann gilt für hinreichend kleine $|s|, |t|$, dass

$$\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}(g(t)) \doteq \exp(\mathcal{A}t) \ni \mathrm{G} \tag{161}$$

eine einparametrige Untergruppe von G bildet.

Beweis: Es gilt:

$$\mathbf{A}(0) = \mathbf{1} \quad \wedge \quad \frac{d\mathbf{A}(g(t))}{dt} = \mathcal{A}\exp(t\mathcal{A}) = \mathcal{A}\mathbf{A}(t) \quad \wedge \quad \left.\frac{d\mathbf{A}(g(t))}{dt}\right|_{t=0} = \mathcal{A} \in \mathcal{G} \tag{162}$$

Umgekehrt folgt aus der Differentialgleichung (162) für $\mathbf{A}(t)$ zusammen mit der Anfangsbedingung $\mathbf{A}(0) = \mathbf{1}$ die Darstellung (161). Offenbar gilt $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(s) = \exp(t\mathcal{A})\exp(s\mathcal{A}) = \exp((t+s)\mathcal{A})$.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass ohne Einschränkung dies ebenso für lokale Lie-Gruppen gilt. Die Abbildung (161) ist also in einer Umgebung des neutralen Elementes bijektiv.

Infinitesimal Erzeugende I

Definition

Für eine lokal lineare Lie-Gruppe G bilden die m linear unabhängigen Matrizen:

$$\mathcal{A}_j = \left.\frac{\partial \mathbf{A}(g)}{\partial g_j}\right|_{g=e} \in \mathcal{G}, \qquad j = 1, \dots, m, \tag{163}$$

die **infinitesimal Erzeugenden** der Lie-Gruppe und jedes Element $\mathbf{A}(g)$ der Lie-Gruppe kann in einer Umgebung um $t = 0$ dargestellt werden in der Form:

$$\mathbf{A}(g(t)) = \exp(t\mathcal{A}), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{G} = \mathrm{L}(\mathrm{G}).$$

Es gilt aufgrund (161):

$$\exp(t\mathcal{A}_j) \in \mathrm{G} \qquad \wedge \qquad \left.\frac{d\exp(t\mathcal{A}_j)}{dt}\right|_{t=0} = \mathcal{A}_j$$

Beispiel: Betrachten wir das Beispiel der SU_2, dann folgt explizit:

$$\exp(t\mathcal{A}_j) = \cos(t)\mathbf{1} + \sin(t)\mathcal{A}_j \quad \in \mathrm{G} = \mathrm{SU}_2, \qquad j = 1, 2, 3$$

Dies gilt nicht nur in einer Umgebung von $t = 0$ sondern für alle $t \in \mathbb{R}$ und stellt somit eine globale Parametrisierung der Lie-Gruppe G dar.

Betrachten wir nun einen weiteren Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren. Hierzu betrachten wir den Vektorraum $V = \mathrm{G}$, der durch die Lie-Gruppe gegeben ist mit Elementen $g = (g_1, \dots, g_m)$.

Die adjungierte Darstellung einer Lie-Gruppe I

Definition

Sei G eine lineare lokale Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathcal{G}$, dann definieren wir die **adjungierte Darstellung** von G über:

$$\mathcal{G} \ni \mathcal{B} \mapsto \mathrm{Ad}_{\mathbf{A}}(\mathcal{B}) \doteq \mathbf{A} \circ \mathcal{B} \circ \mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{G}, \quad \mathbf{A} \in \mathrm{G} \tag{164}$$

Wir lassen im Folgenden das Verknüpfungssymbol $\circ$ weg. Die Abbildung (164) definiert offenbar eine Darstellung:

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_1}\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_2}(\mathcal{B}) = \mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_1}(\mathbf{A}_2\mathcal{B}\mathbf{A}_2^{-1}) = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathcal{B}\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1} = \mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}(\mathcal{B})$$

und es gilt:

$$[\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_1}, \mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_2}](\mathcal{B}) = \mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_1}\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_2}(\mathcal{B}) - \mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_2}\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}_1}(\mathcal{B}) = \mathrm{Ad}_{[\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2]}(\mathcal{B})$$

Definition

Sei eine Lie-Algebra $\mathcal{G}$ gegeben, dann definieren wir eine **adjungierte Abbildung** von $\mathcal{G}$ über:

$$\mathcal{G} \ni \mathcal{B} \mapsto \mathrm{ad}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \doteq [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \in \mathcal{G}, \qquad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}, \tag{165}$$

Die Abbildung (165) wirkt auf einem Vektorraum $V = \mathcal{G}$ der Dimension $m = \dim \mathcal{B}$ und kann als $(m \times m)$-Matrix aufgefasst werden. Bevor wir den allgemeinen Zusammenhang zwischen Ad und ad herstellen, definieren wir allgemein die adjungierte Abbildung.

Die adjungierte Darstellung einer Lie-Gruppe II

Beispiel: Betrachten wir das Beispiel der Lie-Algebra $\mathcal{G} = \mathfrak{su}_2$ mit der Basis:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \imath g_3 & g_2 + \imath g_1 \\ -g_2 + \imath g_1 & -\imath g_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_1 = \imath \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathcal{A}_2 = \imath \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathcal{A}_3 = \imath \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\mathsf{ad}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_1) = \begin{pmatrix} \imath 2g_2 & -2g_3 \\ 2g_3 & -\imath 2g_2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{T}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2g_3 \\ 2g_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{ad}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_2) = \begin{pmatrix} -\imath 2g_1 & \imath 2g_3 \\ -\imath 2g_3 & \imath 2g_2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{T}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_2) = \begin{pmatrix} 2g_3 \\ 0 \\ -2g_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{ad}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_3) = \begin{pmatrix} \imath 0 & 2g_1 - \imath 2g_2 \\ -2g_1 - \imath 2g_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{T}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_3) = \begin{pmatrix} -2g_2 \\ 2g_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die darstellende Matrix:

$$\mathbf{T}_{\mathsf{ad}}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 2g_3 & -2g_2 \\ -2g_3 & 0 & 2g_1 \\ 2g_2 & -2g_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Adjungierte Abbildung I

Definition (Adjungierte Abbildung)

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n \times n; \mathbb{K})$ dann definiert:

$$\mathbf{B} \mapsto \mathsf{ad}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) \doteq [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \mathbb{K}^{n^2} \tag{166}$$

eine lineare Abbildung über einen n^2-dimensionalen Vektorraum V, desweiteren definieren wir:

$$\mathsf{ad}^m_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) \doteq \underbrace{[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \ldots.[\mathbf{A}, \mathbf{B}]]\ldots]}_{m-\text{fach}} \tag{167}$$

$\mathsf{ad}_{\mathbf{A}}$ kann als n^2-dimensionaler linearer Operator aufgefasst werden, der auf $\mathbf{B} \in V$ wirkt.

Theorem

Es sei $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n \times n; \mathbb{K})$, dann gilt:

$$\mathbf{A} \exp(t\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1} = \exp(t\,\mathsf{Ad}_{\mathbf{A}})(\mathbf{B}) = \mathbf{1} + t\,\mathsf{Ad}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) + \frac{t^2}{2}\,\mathsf{Ad}^2_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) + \ldots \tag{168}$$

$$\exp(t\mathbf{A})\mathbf{B}\exp(-t\mathbf{A}) = \exp(t\,\mathsf{ad}_{\mathbf{A}})(\mathbf{B}) = \mathbf{1} + t[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{t^2}{2}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \ldots \tag{169}$$

Die Adjungierte Abbildung II

Beweis: 1. Es gilt:

$$\mathbf{A}\exp(t\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathbf{B}^n\mathbf{A}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{Ad}^n_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \exp(t\,\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}})(\mathbf{B})$$

2. Definieren wir $\mathbf{B}(t) \doteq e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-t\mathbf{A}}$, dann gilt $\mathbf{B}(0) = \mathbf{B}$ und $\dot{\mathbf{B}}(t) = \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}(t))$ und per Induktion $d^n/dt^n\mathbf{B}(t) = \mathrm{ad}^m_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}(t))$. Nun entwicklen wir $\mathbf{B}(t)$ in eine Potenzreihe und führen einen Koeffizientenvergleich durch:

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{d^n\mathbf{B}(0)}{dt^n} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{ad}^m_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \exp(t\,\mathrm{ad}_{\mathbf{A}})(\mathbf{B}) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{B}\exp(-t\mathbf{A})$$

Lemma

Sei eine lokale lineare Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra $\mathcal{G}$ zusammen mit einer differenzierbaren Kurve $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(g(t))$ gegeben, dann gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}(t)}\bigg|_{t=0}(\mathcal{B}) = \mathrm{ad}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \qquad\wedge\qquad \mathcal{A} = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\bigg|_{t=0}, \qquad \mathbf{A}\in\mathrm{G},\ \mathcal{B}\in\mathcal{G}. \tag{170}$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}(t)}\bigg|_{t=0}(\mathcal{B}) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}(t)\mathcal{B}\mathbf{A}(t)^{-1}\right)_{t=0} = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathrm{ad}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}).$$

Es gilt:

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}([\mathcal{B},\mathcal{C}]) = \frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)[\mathcal{B},\mathcal{C}]\mathbf{A}^{-1}(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}[\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}(t)}(\mathcal{B}),\mathrm{Ad}_{\mathbf{A}(t)}(\mathcal{C})]\bigg|_{t=0} = [\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}),\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})] \tag{171}$$

Baker-Campbell-Hausdorf-Theorem V22 - 2506 I

Lemma

Es sei $\mathbf{A}(t)\in M(n\times n;\mathbb{K})$ mit differenzierbaren Funktionen $A_{ij}(t)$, desweiteren betrachte wir die ganze Funktion:

$$f(z) \doteq \frac{e^z-1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!} \tag{172}$$

dann gilt

$$\exp(\mathbf{A}(t))\frac{d}{dt}\exp(-\mathbf{A}(t)) = -f(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}(t)})(\dot{\mathbf{A}}(t)), \qquad \|\mathbf{A}(t)\| < \infty. \tag{173}$$

Beweis: Hierzu definieren wir: $\mathbf{B}(s,t) \doteq \exp(s\mathbf{A}(t))d\exp(s\mathbf{A}(t))/dt$ und entwicklen dies in eine Potenzreihe bzgl. s:

$$\mathbf{B}(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\frac{\partial^n\mathbf{B}(s,t)}{\partial s^n}\bigg|_{s=0} \qquad\wedge\qquad \mathbf{B}(0,t) = 0$$

Nun gilt aber:

$$\frac{\partial\mathbf{B}(s,t)}{\partial s} = \mathrm{ad}_{\mathbf{A}(t)}(\mathbf{B}(s,t)) - \dot{\mathbf{A}}(t) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial^n\mathbf{B}(s,t)}{\partial s^n} = \mathrm{ad}^n_{\mathbf{A}(t)}(\mathbf{B}(s,t)) - \mathrm{ad}^{n-1}_{\mathbf{A}(t)}(\dot{\mathbf{A}}(t))$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{\partial^n\mathbf{B}(0,t)}{\partial s^n} = -\,\mathrm{ad}^{n-1}_{\mathbf{A}(t)}(\dot{\mathbf{A}}(t)) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{B}(s,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\,\mathrm{ad}^{n-1}_{\mathbf{A}(t)}(\dot{\mathbf{A}}(t)) = -s\cdot f(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}(t)})(\dot{\mathbf{A}}(t))$$

Für $s = 1$ folgt die Behauptung.

Baker-Campbell-Hausdorf-Theorem V23 - 2506 II

Theorem (Baker-Campbell-Hausdorf)

Es sei $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \{\mathbf{A} \in M(n \times n, \mathbb{K}) | \|\mathbf{A}\| < \epsilon < 1\}$, *dann existiert ein* $\mathbf{C} \doteq \ln(e^{\mathbf{A}_1} e^{\mathbf{A}_2})$, *desweiteren betrachten wir die für* $|1-\xi| < 1$ *analytische Funktion:*

$$g(\xi) \doteq \frac{\ln(\xi)}{\xi - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\xi)^n}{n+1} \tag{174}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_2 + \int_0^1 dt\, g(\exp(\mathrm{ad}_{t\mathbf{A}_1})(\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2})))(\mathbf{A}_1) \tag{175}$$

$$= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \frac{1}{2}[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] + \frac{1}{12}[\mathbf{A}_1, [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]] - \frac{1}{12}[\mathbf{A}_2, [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1]] + \ldots \tag{176}$$

Beweis: Zunächst definieren wir:

$$\mathbf{C}(t) \doteq \ln(e^{t\mathbf{A}_1} e^{\mathbf{A}_2}),\ 0 \le t \le 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{\mathbf{C}(t)} = e^{t\mathbf{A}_1} e^{\mathbf{A}_2}$$

Mit Hilfe von (169) folgt für ein $\mathbf{B} \in V = M(n \times n; \mathbb{K})$:

$$\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}(t)})(\mathbf{B}) = e^{t\mathbf{A}_1} e^{\mathbf{A}_2} \mathbf{B} e^{-\mathbf{A}_2} e^{-t\mathbf{A}_1} = e^{t\mathbf{A}_1} \mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2}(\mathbf{B}) e^{-t\mathbf{A}_1} = \exp(\mathrm{ad}_{t\mathbf{A}_1})(\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2}))(\mathbf{B})$$

und für $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ folgt: $\mathrm{ad}_{\mathbf{C}(t)} = \ln(\exp(\mathrm{ad}_{t\mathbf{A}_1})(\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2})))$. Desweiteren folgt:

$$e^{\mathbf{C}(t)} \frac{d}{dt} e^{-\mathbf{C}(t)} = e^{t\mathbf{A}_1} e^{\mathbf{A}_2} \frac{d}{dt} e^{-\mathbf{A}_2} e^{-t\mathbf{A}_1(t)} = -\mathbf{A}_1 \quad \wedge \quad e^{\mathbf{C}(t)} \frac{d}{dt} e^{-\mathbf{C}(t)} \overset{(173)}{=} -f(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}(t)})(\dot{\mathbf{C}}(t))$$

Baker-Campbell-Hausdorf-Theorem V24 - 2506 III

$$\Longrightarrow \quad f(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}(t)})(\dot{\mathbf{C}}(t)) = \mathbf{A}_1 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{C}}(t) = f(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}(t)})^{-1}(\mathbf{A}_1) = f(\ln(\exp(\mathrm{ad}_{t\mathbf{A}_1})(\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2}))))^{-1}(\mathbf{A}_1)$$

Hierbei haben wir beachtet, dass $\mathrm{ad}_{\mathbf{C}(t)}$ eine n^2-dimensionale Matrix ist und die inverse Matrix f^{-1} ist, die zu bestimmen ist. Hierzu betrachten wir:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z}{e^z - 1} \overset{z = \ln \xi}{=} \frac{\ln \xi}{\xi - 1} = g(\xi) \quad \Longrightarrow \quad 1 = f(\ln \xi) g(\xi) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{1} = f(\ln \mathbf{A}) g(\mathbf{A})$$

woraus mit $\mathbf{A} = \mathbf{C}(t) = \exp(\mathrm{ad}_{t\mathbf{A}_1})(\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2}))$ folgt:

$$\dot{\mathbf{C}}(t) = f(\ln(\exp(\mathrm{ad}_{t\mathbf{A}_1})(\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2}))))^{-1}(\mathbf{A}_1) = g(\exp(\mathrm{ad}_{t\mathbf{A}_1})(\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2})))(\mathbf{A}_1)$$

Wobei die Anfangsbedingung gilt $\mathbf{C}(0) = \ln(e^{\mathbf{A}_2}) = \mathbf{A}_2 = \mathbf{C}_0$ ist. Nach Integration ergibt sich deswegen:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{A}_2 + \int_0^t dt'\ g(\exp(\mathrm{ad}_{t'\mathbf{A}_1})(\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2})))(\mathbf{A}_1)$$

Es gilt: $\mathbf{C}(1) = \mathbf{C}$ woraus (175) folgt. Die ersten Terme der Entwicklung folgen aus der Darstellung für $g(\xi)$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^1 dt (\mathbf{1} - \exp(\mathrm{ad}_{t\mathbf{A}_1})(\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2})))^n (\mathbf{A}_1)$$

$$= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \int_0^1 dt \frac{1}{2} \left(\mathbf{1} - \sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!k!} \mathrm{ad}^l_{\mathbf{A}_1} \mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}_2} \right) (\mathbf{A}_1) + \int_0^1 dt \frac{1}{3} \left(\mathbf{1} - \sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!k!} \mathrm{ad}^l_{\mathbf{A}_1} \mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}_2} \right)^2 (\mathbf{A}_1) + \ldots$$

$$= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \frac{1}{2} \int_0^1 dt \left(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2} + \frac{1}{2} \mathrm{ad}^2_{\mathbf{A}_2} + \ldots + t\, \mathrm{ad}_{\mathbf{A}_1} \mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2} + \ldots \right) (\mathbf{A}_1) + \frac{1}{3} \int_0^1 dt \left(\mathrm{ad}^2_{\mathbf{A}_2} + t\, \mathrm{ad}_{\mathbf{A}_1} \mathrm{ad}_{\mathbf{A}_2} + \ldots \right) (\mathbf{A}_1) + \ldots$$

$$= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \frac{1}{2}[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] + \frac{1}{12}[\mathbf{A}_1, [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]] - \frac{1}{12}[\mathbf{A}_2, [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1]] + \ldots$$

BAKER-CAMPBELL-HAUSDORF-Theorem

Lemma

Die explizite Form der BAKER-CAMPBELL-HAUSDORF *Formel lautet für* $e^{\mathbf{C}} = e^{\mathbf{A}_1} e^{\mathbf{A}_2}$*:*

$$\mathbf{C} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n} \sum_{\substack{p_1, q_1, \ldots, q_n, p_n \geq 0 \\ p_i + q_i > 0}} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (q_i + p_i)} \frac{[\mathbf{A}_1^{p_1}, \mathbf{A}_2^{q_1}, \cdots, \mathbf{A}_1^{p_n}, \mathbf{A}_2^{q_n}]}{\prod_{i=1}^{n} p_i! q_i!} \tag{177}$$

mit dem Multikommutator:

$$[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_l] = [\mathbf{B}_1, [\mathbf{B}_2, [...[\mathbf{B}_{l-1}, \mathbf{B}_l]...]]] \tag{178}$$

Beweis: Folgt ...

Darstellung von Lie-Gruppen

Definition

Eine Darstellung einer linearen Lie-Gruppe G mit Darstellungsraum V ist ein differenzierbarer Homomorphismus:

$$\mathbf{T} : \mathrm{G} \ni \mathbf{A} \mapsto \mathbf{T}(\mathbf{A}) \in \mathrm{GL}(V) \tag{179}$$

Für jedes $\mathcal{A} \in \mathrm{L}(\mathrm{G}) = \mathcal{G}$ ist der infinitesimale erzeugende Operator definiert durch:

$$\mathcal{A} = \mathbf{T}_{\mathcal{A}} \doteq \frac{d}{dt} \mathbf{T}(\mathbf{A}(t)) \Big|_{t=0} \tag{180}$$

wobei $\mathbf{A}(g(t))$ eine differenzierbare Kurve durch das neutrale Element ist.

Definition

Eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathcal{G}$ mit Darstellungsraum V ist ein Abbildung $\boldsymbol{\rho}$ in den Raum aller linearen Operatoren aus $\mathrm{GL}(V)$, so dass gilt:

$$\boldsymbol{\rho}(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}) = \alpha\boldsymbol{\rho}(\mathcal{A}) + \beta\boldsymbol{\rho}(\mathcal{B}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G} \tag{181}$$

$$\boldsymbol{\rho}([\mathcal{A}, \mathcal{B}]) = [\boldsymbol{\rho}(\mathcal{A}), \boldsymbol{\rho}(\mathcal{B})] \tag{182}$$

Die Operatoren $\mathbf{T}_{\mathcal{A}} \doteq \rho(\mathcal{A})$ definieren eine Darstellung von $\mathrm{L}(\mathrm{G})$ auf V und umgekehrt kann man eine Darstellung in der Nähe des neutralen Elementes definieren über $\mathbf{T}_{\mathcal{A}}$: $\mathbf{T}(\exp(\mathcal{A})) \doteq \exp(\mathbf{T}_{\mathcal{A}})$.

Lokale Transformationsgruppen

Definition

Wir betrachten eine offene zusammenhängende Umgebung $U \subset \mathbb{K}^n$. Jedes Element aus U schreiben wir in der Form $x = (x_1, ..., x_n)^t$. Desweiteren sei G eine m-dimensionale lokale Lie-Gruppe mit Elementen $g = (g_1, ..., g_m)$ gegeben sowie eine Abbildung:

$$q : (\mathrm{G} \times U) \ni (g, x) \mapsto q(g, x) \in \mathbb{K}^n \qquad (183)$$

Eine **lokale Lie-Transformationsgruppe** ist gegeben, wenn gilt:

1. $q(g, x)$ ist beliebig oft differenzierbar in den $n + m$ Koordinaten von x und g
2. $q(e, x) = x, \quad \forall x \in U$
3. Wenn $q(g', x) \in U$, dann gilt $q(gg', x) = q(g', q(g, x)), \ \ g, g', gg' \in \mathrm{G}$

Wir haben es zumeist mit linearen Lie-Gruppen zu tuen, dann ist die Abbildung gegeben durch

$$x' = q(g, x) = \mathbf{A}(g)^{-1} \circ x \equiv \mathbf{A}(g)^{-1} x \qquad (184)$$

Ein Beispiel einer solchen Abbildung haben wir in der Darstellung (58) kennengelernt:

$$[\mathbf{T}(g)f](x) \doteq f(g^{-1}x) \qquad (185)$$

Bei diesen Transformationen handelt es sich in der Physik oft um Koordinatentransformationen. Im Folgenden nutzen wir die Eigenschaft, dass die Lie-Gruppe lokal um das neutrale Element mittels (161) parametrisiert werden kann:

$$x(t) = \mathbf{A}(g(t))^{-1} x^0, \qquad \mathbf{A}(g(t)) = \exp(t\mathcal{A}), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{G} = \mathrm{L}(\mathrm{G}) \qquad (186)$$

Die Lie-Ableitung (Derivation)

V26 - 0307

Definition

Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{K}^n)$ eine stetig differenzierbare Funktion und $g = g(t) = (g_1(t), ..., g_m(t))$ eine differenzierbare Kurve um das neutrale Element $g = e$ aus einer m-dimensionalen Lie-Gruppe G, und $q(g, x)$ sei eine lokale Lie-Transformationsgruppe, dann definieren wir die **Lie-Derivation** von f in Richtung $\tau \in T_e\mathrm{G}$ über:

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \mathbf{L}_\tau f(x) \doteq \left. \frac{df(q(g(t), x))}{dt} \right|_{t=0}, \qquad T_e\mathrm{G} \ni \tau = \sum_{j=1}^m \dot{g}_j(0) = \sum_{j=1}^m \tau_j \qquad (187)$$

Lemma

Die Lie-Derivation ist gegeben durch:

$$\mathbf{L}_\tau = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_{ij}(x) \tau_j \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \wedge \qquad L_{ij}(x) = \left. \frac{\partial q_i(g, x)}{\partial g_j} \right|_{(e,x)} \qquad (188)$$

<u>Beweis:</u>

$$\mathbf{L}_\tau f(x) = \left. \frac{df(q(g(t), x))}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f(q)}{\partial q_i} \right|_{(q=x)} \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial q_i(g, x)}{\partial g_j} \right|_{(e,x)} \left. \frac{dg_j(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\left. \frac{\partial q_i(g, x)}{\partial g_j} \right|_{(e,x)}}_{=L_{ij}(x)} \tau_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Die Lie-Derivation hängt nur vom Tangentialvektor $\tau \in T_e\mathrm{G}$ ab und nicht von der im Speziellen gewählten Kurve $g = g(t)$.

Die Lie-Derivation – Beispiele

Beispiel:

1. Sei $G = \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ und $q(a,x) \doteq a + x$ dann folgt mit $a(t) \doteq \tau t$ und $\tau = \dot{a}(0)$:
$$\mathbf{L}_\tau f(x) = \left.\frac{df(q(a(t),x))}{dt}\right|_{t=0} = \tau \left.\frac{df(t+x)}{dt}\right|_{t=0} = \tau \frac{df(x)}{dx}$$
oder allgemein mit einer beliebigen Kurve und $\tau = \dot{a}(0)$:
$$\mathbf{L}_\tau = \tau \frac{d}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x+\tau) = f(x) + \mathbf{L}_\tau f(x) + O(\tau^2)$$

2. Sei $G = GL_n(\mathbb{C})$ und eine Kurve $\mathbf{A}(g(t)) \in G$ gegeben, sowie $\mathcal{G} \ni \mathcal{A} = \sum_j \mathcal{A}_j \dot{g}_j(0) = \sum_j \mathcal{A}_j \tau_j$. Die lokale Lie-Transformationsgruppe sei gegeben durch $q(g,x) = \mathbf{A}(g)^{-1}x$, dann folgt:
$$\mathbf{L}_\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial(\mathbf{A}(g)^{-1}x)_i}{\partial g_j}\right|_{(e,x)} \tau_j \frac{\partial}{\partial x_i} = -\sum_{i,j=1}^n \left[\mathbf{A}(g)^{-1}\frac{\partial \mathbf{A}(g)}{\partial g_j}\mathbf{A}(g)^{-1}x\right]_{i,(e,x)} \tau_j \frac{\partial}{\partial x_i} = -\sum_{i,j=1}^n (\mathcal{A}_j x)_i \tau_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$
Im Speziellen für $G = O_2$ und $g_1(t) = \alpha t$ also $\tau_1 = \alpha$ und $x = (x_1, x_2)^t$
$$\mathbf{A}(g_1) = \begin{pmatrix} \cos g_1 & \sin g_1 \\ -\sin g_1 & \cos g_1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{L}_{\alpha\mathcal{A}_1} = -\alpha\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$
und hieraus analog zum vorherigen Beispiel:
$$f(\mathbf{A}(g)^{-1}x) = f(x) + \mathbf{L}_{\alpha\mathcal{A}} f(x) + O(\alpha^2)$$

Im Folgenden wollen wir den allgemeinen Zusammenhang der *Taylorreihenentwicklung* lokaler Lie-Transformationsgruppen diskutieren und die vollständige Reihenentwicklung mittels der Lie-Derivationen ableiten.

Die Lie-Derivation von einparametrigen Lie-Untergruppen

Lemma

Betrachte eine Lie-Transformationsgruppe einer einparametrigen Untergruppe:
$$\mathbb{K}^n \ni q(g(t),x) = \exp(-t\mathcal{A})x, \quad \mathcal{A} \in L(G) \tag{189}$$
Die Lie-Derivation von $f(q)$ in Richtung $\mathcal{A}$ ist gegeben durch:
$$\mathbf{L}_\mathcal{A} = -\sum_{i=1}^n (\mathcal{A}x)_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{190}$$

Beweis:
$$\mathbf{L}_\mathcal{A} f(x) = \left.\frac{df(q(g(t),x))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial f(q)}{\partial q_i}\right|_{q=x} \left.\frac{d(\exp(-t\mathcal{A})x)_i}{dt}\right|_{t=0} = -\sum_{i=1}^n (\mathcal{A}x)_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Beispiel: Betrachten wir die SU_2, dann finden wir:
$$\mathcal{A}_1 = \imath\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{L}_{\mathcal{A}_1} = -\imath x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \imath x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$\mathcal{A}_2 = \imath\begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{L}_{\mathcal{A}_2} = +x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$\mathcal{A}_3 = \imath\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{L}_{\mathcal{A}_3} = -\imath x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \imath x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Die Lie-Derivation von einparametrigen Lie-Untergruppen II

Theorem

Für eine gegebene Lie-Algebra L(G) *sei die Lie-Derivation* $\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$ *gegeben, dann ist die Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{L}_{\mathcal{A}} x(t), \qquad x(0) = x^0 \in \mathbb{K}^n \tag{191}$$

gegeben durch

$$x(t) = \exp(-t\mathcal{A})x^0 \tag{192}$$

Zudem bestimmt $\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$ *die lokale Lie-Transformationsgruppe eindeutig und es gilt:*

$$f(\exp(-t\mathcal{A})x) = \exp(t\mathbf{L}_{\mathcal{A}})f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{L}_{\mathcal{A}}^k f(x) \tag{193}$$

Beweis: Es sei $\mathcal{A} \in$ L(G) und in einer hinreichend kleine Werte für $|t|$, $|s|$ und $|t+s|$ existiere die Darstellung:

$$x(t+s) = \exp(-(s+t)\mathcal{A})x^0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(s+t) = \exp(-s\mathcal{A})\exp(-t\mathcal{A})x^0 = \exp(-s\mathcal{A})x(t)$$

Dies differenzieren wir nach s und setzen $s = 0$:

$$\left.\frac{dx(s+t)}{ds}\right|_{s=0} = -\mathcal{A}\,\exp(-s\mathcal{A})x(t)|_{s=0} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dx(t)}{dt} = -\mathcal{A}x(t)$$

Die Lie-Derivation von einparametrigen Lie-Untergruppen III

Andererseits gilt:

$$\mathbf{L}_{\mathcal{A}} x_j \overset{(190)}{=} -\sum_{i=1}^{n} (\mathcal{A}x)_i \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = -(\mathcal{A}x)_j \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{L}_{\mathcal{A}} x = -\mathcal{A}x$$

Betrachten wir nun eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{K}^n)$ und $x(t) = \exp(-t\mathcal{A})x^0$, dann gilt:

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{d(\exp(-t\mathcal{A})x^0)_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} (\mathcal{A}\exp(-t\mathcal{A})x^0)_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} (\mathcal{A}x(t))_i \overset{(190)}{=} \mathbf{L}_{\mathcal{A}} f(x(t)),$$

mit der Anfangsbedingung:

$$f(x(0)) = f(x^0)$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung von Differentialgleichungen folgt, das $f(x(t)) \equiv f(\exp(-t\mathcal{A})x^0)$ die eindeutige Lösung ist, und da f beliebig oft differenzierbar ist folgt weiterhin:

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x(t)) = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{\mathcal{A}} f(x(t))) = \mathbf{L}_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}_{\mathcal{A}} f(x(t))) = \mathbf{L}_{\mathcal{A}}^2 f(x(t)) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^k}{dt^k} f(x(t)) = \mathbf{L}_{\mathcal{A}}^k f(x(t))$$

Hieraus erhält man über die Taylorreihe um $t = 0$:

$$f(x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left.\frac{d^k f(x(t))}{dt^k}\right|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left.\mathbf{L}_{\mathcal{A}}^k f(x(t))\right|_{t=0} = \exp(t\mathbf{L}_{\mathcal{A}})f(x^0)$$

Für das Beispiel G $= \mathbb{R}$ mit $q = x + t$ Lie-Derivation $\mathbf{L}_t = td/dx$ reduziert sich dies auf die Taylorentwicklung, denn:

$$f(x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left.\mathbf{L}_1^k f(x)\right|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left.\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{t=0} = f(x_0 + t) \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = x^0 + t$$

In diesem Fall ist die Lie-Transformationsgruppe durch die Zeittranslation gegeben.

Die Lie-Algebra der Lie-Derivationen

Theorem (Lie-Algebra der Lie-Derivationen)

Die Menge aller Lie-Derivationen einer lokalen Lie-Transformationsgruppe bilden eine Lie-Algebra, die wir mit $\mathcal{L}(\mathrm{G})$ bezeichnen, die homomorph zu $\mathrm{L}(\mathrm{G})$ ist und für die gilt:

1. $\mathbf{L}_{\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B}} = \alpha\mathbf{L}_{\mathcal{A}} + \beta\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$
2. $\mathbf{L}_{[\mathcal{A},\mathcal{B}]} = [\mathbf{L}_{\mathcal{A}}, \mathbf{L}_{\mathcal{B}}]$

für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{L}(\mathrm{G}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Beweis:

1. Folgt unmittelbar aus der Definition (187) und der Eigenschaft (188).
2. Um dies zu zeigen gehen wir analog zum Beweis von (150) vor. Wir definieren eine analytische Kurve in G:

$$\mathrm{G} \ni g(t) \doteq \exp(-\hat{t}^2\mathcal{A})\exp(-\hat{t}^2\mathcal{B})\exp(+\hat{t}^2\mathcal{A})\exp(+\hat{t}^2\mathcal{B}), \qquad t = \hat{t}^2, \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{L}(\mathrm{G})$$

Der Tangentenvektor der Kurve bei $t = 0$ ist dann aufgrund von (150) gegeben durch $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, so dass gilt:

$$\mathbf{L}_{[\mathcal{A},\mathcal{B}]} f(x) = \left.\frac{df(q(g(t), x))}{dt}\right|_{t=0} \tag{194}$$

Andererseits gilt aber auch für die rechte Seite:

$$f(q(g(t), x)) \overset{(193)}{=} \exp(\hat{t}^2\mathbf{L}_{\mathcal{A}})\exp(\hat{t}^2\mathbf{L}_{\mathcal{B}})\exp(-\hat{t}^2\mathbf{L}_{\mathcal{A}})\exp(-\hat{t}^2\mathbf{L}_{\mathcal{B}})f(x) = (1 + \hat{t}^2[\mathbf{L}_{\mathcal{A}}, \mathbf{L}_{\mathcal{B}}] + \ldots)f(x)$$

woraus die Behauptung folgt.

Aus diesen beiden Eigenschaften folgt für eine Lie-Algebra mit Strukturkonstanten c_l^{jk}, dass gilt:

$$[\mathbf{L}_{\mathcal{A}_j}, \mathbf{L}_{\mathcal{A}_k}] = \sum_l c_l^{jk}\mathbf{L}_{\mathcal{A}_l} \tag{195}$$

Somit ist $\mathcal{L}(\mathrm{G})$ homomorph zur Lie-Algebra $\mathrm{L}(\mathrm{G})$.

Die Lie-Transformationsgruppe einer Lie-Derivation

V27 - 1007

Theorem

Es seien m linear unabhängige Differential-Operatoren mit differenzierbaren Funktionen $\hat{L}_{ji}(x)$ auf einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ gegeben. Existieren Konstanten $c_{jk}^l \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$\mathbf{L}_j \doteq \sum_{i=1}^n \hat{L}_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \wedge \qquad [\mathbf{L}_j, \mathbf{L}_k] = \sum_{l=1}^m c_{jk}^l \mathbf{L}_l, \qquad j, k = 1, \ldots, m \tag{196}$$

dann ist die dadurch generierte m-dimensionale Lie-Algebra $\mathcal{G}$ eine Lie-Algebra einer lokalen Lie-Transformationsgruppe G auf U. Die Wirkung auf ein $x^0 \in U$ erhält man aus der Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{L}_{\mathcal{A}}x, \qquad \mathbf{L}_{\mathcal{A}} = -\sum_{j=1}^m \mathcal{A}_j\mathbf{L}_j \qquad \wedge \qquad x(0) = x^0 \tag{197}$$

Beweis: Da die $\mathbf{L}_j$ eine Basis einer Lie-Algebra bilden, kann jedes $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$ äquivalent geschrieben werden in der Form: $\mathbf{L}_{\mathcal{A}} = \sum_j \mathcal{A}_j\mathbf{L}_j$. Es ist klar, dass zu dieser Lie-Algebra eine lokale Lie-Gruppe G gehört, die bis auf Isomorphie eindeutig ist. Jedes Element dieser Lie-Gruppe kann lokal geschrieben werden in der Form $g = \exp(\mathcal{A})$. Dann ist die Wirkung von g auf x gegeben durch: $q(g, x) = g^{-1}x = \exp(-\mathcal{A})x$. Die Lösung der DGL (197) ist dann gegeben durch $x(t) = \exp(-t\mathcal{A})x^0$. Nun müsste noch gezeigt werden, dass die durch die Lösung von (197) erzeugte lokale Gruppe eine lokale Lie-Transformationsgruppe ist, es also gilt: $q(g, q(h, x)) = q(hg, x)$ mit $q(g, x) = g^{-1}x$ und $g = \exp(\mathcal{A}),\ h = \exp(\mathcal{B})$. Der Beweis ist länger und wollen wir hier nicht zeigen (siehe *Miller, Seite 194*).

Lokale Multiplikationsdarstellung

Definition

Es sei eine lokale Lie-Transformationsgruppe $q(g,x)$ auf G gegeben mit $x^0 \in U \subset \mathbb{K}^n$ und $f \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{K})$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Eine **lokale Multiplikations-Darstellung** $\mathbf{T}^\nu$ von G auf $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{K}^n)$ mit **Multiplikator** $\nu = \nu(g,x)$ besteht aus einer Abbildung:

$$[\mathbf{T}^\nu(g)f](x) \doteq \nu(g,x)f(q(g,x)) \tag{198}$$

mit einer skalaren Funktion ν für die gilt:

1. $\nu(e,x) = 1$
2. $\nu(gg',x) = \nu(g,x)\nu(g',q(g,x)), \qquad \forall g,g',gg' \in \mathrm{G}$

Es handelt sich um eine Darstellung:

$$[\mathbf{T}^\nu(gg')f](x) = \nu(g,x)\nu(g',q(g,x))f(q(g',q(g,x))) = \nu(g,x)[\mathbf{T}^\nu(g')f](q(g,x)) = [\mathbf{T}^\nu(g)\mathbf{T}^\nu(g')f](x)$$

Speziell für eine lokal lineare Lie-Transformationsgruppe mit $\mathbf{A}(g) \in \mathrm{G}$, folgt:

$$[\mathbf{T}^\nu(g)f](x) \doteq \nu(g,x)f(\mathbf{A}(g)^{-1}x) \tag{199}$$

Für $\nu = 1$ erhalten wir offenbar die lokalen Lie-Transformationsgruppen. Im nächsten Kapitel werden wir explizit eine Multiplikations-Darstellung der SU_2 diskutieren.

Die verallgemeinerte Lie-Ableitung (Derivation)

V28 - 1707

Definition

Es sei $f \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{K}^n)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $g(t) = \exp(t\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \in \mathrm{L(G)}$ eine einparametrige Kurve in G, und $\mathbf{T}^\nu$ eine lokale Multiplikations-Darstellung mit Lie-Transformationsgruppe $q(g,x)$, dann definieren wir die **verallgemeinterte Lie-Derivation** über:

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \mathbf{L}^\nu_\mathcal{A} f(x) \doteq \frac{d}{dt}[\mathbf{T}^\nu(\exp(t\mathcal{A}))f](x)\Big|_{t=0} \tag{200}$$

Lemma

Es sei $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^m \mathcal{A}_j$, dann ist verallgemeinerte Lie-Derivation ist gegeben durch:

$$\mathbf{L}^\nu_\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial q_i(g,x)}{\partial g_j}\Big|_{(e,x)} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \mathcal{A}_j L_j(x) \qquad \wedge \qquad \sum_{j=1}^m \mathcal{A}_j L_j(x) = \frac{d\nu(e^{t\mathcal{A}},x)}{dt}\Big|_{t=0} \tag{201}$$

Beweis:

$$\mathbf{L}^\nu_\mathcal{A} f(x) = \frac{d}{dt}[\mathbf{T}^\nu(e^{t\mathcal{A}})f](x)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\nu(e^{-t\mathcal{A}},x)f(q(e^{t\mathcal{A}},x))\Big|_{t=0} = v(e,x)\mathbf{L}_\mathcal{A} f(x) + \frac{d\nu(e^{t\mathcal{A}},x)}{dt}\Big|_{t=0} f(x)$$

Setzt man für den letzten Term $\sum_j = \mathcal{A}_j L_j(x)$ ein so ergibt sich zusammen mit (190) die Behauptung. Die Funktionen $L_j(x)$ sind durch die Ableitung dv/dt gegeben.

Die verallgemeinerte Lie-Ableitung (Derivation) V29 - 1707 II

Unmittelbar daraus folgt für eine Lie-Algebra $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$:

$$\mathbf{L}^{\nu}_{\mathcal{A}_i} = \mathbf{L}_{\mathcal{A}_i} + \mathcal{A}_i L_i, \qquad i = 1, \dots, m \tag{202}$$

Das Theorem zur Lie-Algebra der Lie-Derivation überträgt sich damit sofort:

Theorem (Lie-Algebra der verallgemeinterten Lie-Derivationen)

Für die verallgemeinerte Lie-Derivation einer Multiplikations-Darstellung $\mathbf{T}^{\nu}$ gilt

1. $\mathbf{L}^{\nu}_{\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B}} = \alpha\mathbf{L}^{\nu}_{\mathcal{A}} + \beta\mathbf{L}^{\nu}_{\mathcal{B}}$
2. $\mathbf{L}^{\nu}_{[\mathcal{A},\mathcal{B}]} = [\mathbf{L}^{\nu}_{\mathcal{A}}, \mathbf{L}^{\nu}_{\mathcal{B}}]$

für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathsf{L}(\mathsf{G})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Damit bilden die Operatoren $\mathbf{L}^{\nu}_{\mathcal{A}_1}, \dots, \mathbf{L}^{\nu}_{\mathcal{A}_m}$ eine zur Lie-Algebra $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ homomorphe Lie-Algebra und es kann unmittelbar das Ergebnis (193) übertragen werden:

$$[\mathbf{T}^{\nu}(\exp(-t\mathcal{A}))f](x) = \exp(t\mathbf{L}^{\nu}_{\mathcal{A}})f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(\mathbf{L}^{\nu}_{\mathcal{A}})^k f(x) \tag{203}$$

Beispiel: $\mathsf{SL}_2/\mathfrak{sl}_2$ I

Beispiel: Betrachten wir als Beispiel die komplexe Gruppe SL_2 mit Lie-Algbera $\mathfrak{sl}_2$. Elemente aus der Gruppe und Lie-Algebra parametrisieren wir wie folgt:

$$\mathsf{SL}_2 \ni g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2$$

Eine Basis der spurlosen Matrizen ist gegeben durch:

$$\mathcal{A}_+ \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad \mathcal{A}_- \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad \mathcal{A}_z \doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie man leicht verifiziert gelten die Vertauschungsrelationen:

$$[\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+] = 2\mathcal{A}_z \qquad \wedge \qquad [\mathcal{A}_z, \mathcal{A}_\pm] = \pm\mathcal{A}_\pm$$

Nun betrachten wir die folgende Multiplikations-Darstellung:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto [\mathbf{T}^{\nu}(g)f](z) \doteq \nu(g,z)f(q(g,x)) \qquad \wedge \qquad \nu(g,z) \doteq (bz+d)^{2u},\ u \in \mathbb{C} \qquad \wedge \qquad q(g,z) \doteq \frac{az+c}{bz+d} \tag{204}$$

Zunächst gilt für die Multiplikation zweier Gruppenelemente:

$$gg' = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ g_3' & g_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1g_1' + g_2g_3' & g_1g_2' + g_2g_4' \\ g_3g_1' + g_4g_3' & g_3g_2' + g_4g_4' \end{pmatrix}$$

Damit folgt für die Transformationsgruppe:

$$q(g', q(g,z)) \overset{z'=q(g,z)}{=} \frac{g_1'z' + g_3'}{g_2'z' + g_4'} = \frac{g_1'(g_1z+g_3)/(g_2z+g_4) + g_3'}{g_2'(g_1z+g_3)/(g_2z+g_4) + g_4'} = \frac{(g_1g_1' + g_2g_3')z + g_3g_1' + g_4g_3'}{(g_1g_2' + g_2g_4')z + g_3g_2' + g_4g_4'} = q(gg', z)$$

und analog für die skalare Funktion ν:

$$\nu(g,z)\nu(g', q(g,z)) = (g_2z+g_4)^{2u}(g_2'z' + g_4')^{2u} \overset{z'=q(g,z)}{=} [(g_2z+g_4)(g_2'(g_1z+g_3)/(g_2z+g_4) + g_4')]^{2u} = \nu(gg', z)$$

Beispiel: $SL_2/\mathfrak{sl}_2$ II

Das heißt (204) ist tatsächlich eine Multiplikations-Darstellung. Die verallgemeinerten Lie-Ableitungen sind dann gegeben durch:

$$\mathbf{A}_+(t) \doteq \exp(t\mathcal{A}_+) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{L}_+^\nu f(z) = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{T}^\nu(\mathbf{A}_+(t))f\right](z)\Big|_{t=0} = \left(2uz - z^2\frac{d}{dz}\right) f(z)$$

$$\mathbf{A}_-(t) \doteq \exp(t\mathcal{A}_-) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{L}_-^\nu f(z) = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{T}^\nu(\mathbf{A}_-(t))f\right](z)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dz} f(z)$$

$$\mathbf{A}_z(t) \doteq \exp(t\mathcal{A}_z) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{L}_z^\nu f(z) = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{T}^\nu(\mathbf{A}_z(t))f\right](z)\Big|_{t=0} = \left(-u + z\frac{d}{dz}\right) f(z)$$

Es gilt:

$$\mathbf{L}_+^\nu = 2uz - z^2\frac{d}{dz} \quad\wedge\quad \mathbf{L}_-^\nu = \frac{d}{dz} \quad\wedge\quad \mathbf{L}_z^\nu = -u + z\frac{d}{dz} \tag{205}$$

und daraus folgt:

$$[\mathbf{L}_-^\nu, \mathbf{L}_+^\nu] = 2\mathbf{L}_z^\nu \quad\wedge\quad [\mathbf{L}_z^\nu, \mathbf{L}_\pm^\nu] = \pm\mathbf{L}_\pm^\nu \tag{206}$$

Betrachten wir $\mathbb{N} \ni n = 2u$ so gelangen wir zu n-dimensionalen Darstellungen, wenn wir die Basis

$$h_l \doteq z^l, \quad l = 0, 1, \dots, n = 2u \tag{207}$$

der Polynome bilden. Die Wirkung der Lie-Ableitungen auf diese Basis lautet:

$$\mathbf{L}_-^\nu h_l = l h_{l-1} \quad\Longrightarrow\quad (\mathbf{L}_-^\nu)^k h_l = \frac{l!}{(l-k)!} h_{l-k}, \quad k = 0, 1, \dots, l \tag{208}$$

$$\mathbf{L}_+^\nu h_l = (n-l) h_{l+1} \quad\Longrightarrow\quad (\mathbf{L}_+^\nu)^k h_l = \frac{(n-l)!}{(n-l-k)!} h_{l+k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-l \tag{209}$$

$$\mathbf{L}_z^\nu h_l = (l - n/2) h_l \quad\Longrightarrow\quad (\mathbf{L}_z^\nu)^k h_l = (l - n/2)^k h_l, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{210}$$

Beispiel: $SL_2/\mathfrak{sl}_2$ III

Dies stellt eine $n+1$-dimensionale Darstellung der $\mathfrak{sl}_2$ dar, mit den darstellenden Matrizen:

$$\mathbf{T}_-^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 \end{pmatrix} \quad\wedge\quad \mathbf{T}_+^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_z^{(n+1)} = \begin{pmatrix} -n/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n/2+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n/2-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n/2 \end{pmatrix}$$

4 Zusammenhang zwischen SU_2 und SO_3

Beziehung zwischen der Gruppe SU_2 und SO_3 I

Betrachten wir die folgenden Parametrisierungen:

$$\mathrm{SU}(2) \ni \mathbf{A} = \begin{pmatrix} g_0 + \imath g_3 & g_2 + \imath g_1 \\ -g_2 + \imath g_1 & g_0 - \imath g_3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathfrak{su}_2 \ni \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \imath b_3 & b_2 + \imath b_1 \\ -b_2 + \imath b_1 & -\imath b_3 \end{pmatrix} \tag{211}$$

wobei $g_0^2 = 1 - g_1^2 - g_2^2 - g_3^2$ und die adjungierte Darstellung der SU_2:

$$\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}' \equiv \mathrm{Ad}_{\mathbf{A}}(\mathcal{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \in \mathfrak{su}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{T}_{\mathrm{Ad}}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ad}_{\mathbf{A}}$$

Nun gilt:

$$\sum_{i=1}^{3} b_i'^2 = \det(\mathcal{B}') = \det(\mathbf{A} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{3} b_i^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{T}_{\mathrm{Ad}}(\mathbf{A}) \in O_3 \quad \wedge \quad b_i' = \sum_{j=1}^{3} D(\mathbf{A})_{ij} b_j$$

mit einer Drehmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{A}) \in O_3$. Die SU_2 ist zusammenhängend und stetig als Funktion der Parameter g_1, g_2, g_3, und damit ist dann auch die darstellende Matrix $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ stetig. Desweiteren gilt: $\mathbf{D}(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_3$ woraus folgt $\det(\mathbf{D}(\mathbf{1}_2)) = 1$ und damit $\det(\mathbf{D}(\mathbf{A})) = 1$, also $\mathbf{D}(\mathbf{A}) \in SO_3$. Damit handelt es sich um einen Homomorphismus.
Es wird die komplette SO_3 abdeckt. Hierzu betrachten wir ein Elemente $\mathbf{D} \in SO_3$ und die Transformation:

$$b_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij} b_j .$$

Wenn wir die Parametrisierung (211) für b_j, b_j' in der Schreibweise $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathfrak{su}_2$ verwenden folgt:

$$\mathrm{Sp}\ \mathcal{B} = \mathrm{Sp}\ \mathcal{B}' = 0 \qquad \wedge \qquad \det(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{B}') \doteq d^2$$

Beziehung zwischen der Gruppe SU_2 und SO_3 II

Nun bilden wir aus den schiefsymmetrischen Matrizen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ die hermiteschen Matrizen:

$$(\imath\mathcal{B})^\dagger = \imath\mathcal{B} \qquad \wedge \qquad (\imath\mathcal{B}')^\dagger = \imath\mathcal{B}'$$

damit haben $\imath\mathcal{B}$ und $\imath\mathcal{B}'$ die selben Eigenwerte $\pm\imath d$. Daraus folgt aber, dass eine unitäre Matrix $\mathbf{B}$ mit $|\det(\mathbf{B})| = +1$ existieren muss für die gilt:

$$\mathcal{B}' = \mathbf{B}\cdot\mathcal{B}\cdot\mathbf{B}^{-1}$$

Also können wir $\mathbf{B} = e^{\imath\phi}\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A} \in SU_2$ schreiben, woraus folgt: $\mathcal{B}' = \mathbf{A}\cdot\mathcal{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}$. Dann muss offenbar gelten $\det(\mathbf{B}) = e^{\imath 2\phi}$. Da die Matrix $\mathbf{D}$ beliebig gewählt wurde und es sich um einen Homomorphismus handelt überdeckt die SU_2 die SO_3. Man beachte aber, dass gilt:

$$SU_2 \ni \mathbf{A} \qquad \Longrightarrow \qquad (-\mathbf{A}) \in SU_2$$

und deswegen:

$$(-\mathbf{A})\cdot\mathcal{B}\cdot(-\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathcal{B}\cdot\mathbf{A}^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{D}(-\mathbf{A}) = \mathbf{D}(\mathbf{A})$$

Damit gibt es für jedes Element der SO_3 zwei Elemente aus der SU_2 und man sagt SO_3 ist isomorph zur Faktorgruppe $SU_2/\{\pm\mathbf{1}_2\}$.